Università di Pisa
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Teoremi di tipo "Wolff-Denjoy" in più variabili complesse

Candidato:
Marco Vergamini

Relatore:
Prof. **Marco Abate**

22 Settembre 2023

Anno Accademico 2022/2023

Indice

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è dimostrare alcune possibili generalizzazioni, in più variabili complesse, o anche per varietà complesse astratte che soddisfano opportune ipotesi, del teorema di Wolff-Denjoy sul comportamento delle iterate di funzioni olomorfe nel disco unitario in $\mathbb{C}$, dimostrato indipendentemente nel 1926 da Denjoy in [D] e da Wolff in [Wo]. Riportiamo l'enunciato di tale teorema.

Teorema. *(Wolff-Denjoy) Sia f una funzione olomorfa nel disco unitario $\mathbb{D}$ in $\mathbb{C}$ a valori nel disco stesso. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *la funzione f ha un punto fisso nel disco; oppure,*
- *esiste un unico punto del bordo del disco tale che la successione delle iterate di f converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Era già nota da tempo la generalizzazione, dovuta ad Abate ([A4, Theorem 0.5]), per domini limitati strettamente pseudoconvessi in più variabili; in questo caso, però, l'affermazione "la funzione f ha un punto fisso" dev'essere sostituita da "le orbite dei punti del dominio tramite f sono relativamente compatte nel dominio". Ci riferiremo a enunciati con tesi simili come teoremi di tipo "Wolff-Denjoy".

Il teorema ottenuto da Abate può essere dimostrato, come vedremo, usando i risultati di [BB] e [Ka]. In particolare, nel primo dei due articoli gli autori dimostrano che i domini limitati strettamente pseudoconvessi sono iperbolici nel senso di Gromov. Sebbene gli approcci meno recenti ai risultati che vedremo si sono sviluppati sotto queste ipotesi, in questa tesi presenteremo solo un breve accenno a come possono essere usate. Ci interesseremo invece di ottenere teoremi di tipo "Wolff-Denjoy" sotto ipotesi che verificheremo poi essere soddisfatte anche, ma non solo, dai domini limitati strettamente pseudoconvessi.

Più recentemente, in diversi articoli si è cercato di ottenere risultati analoghi a quello di Abate per domini sempre più generali.

Nel 2017 Bharali e Zimmer, nel loro articolo [BZ1], hanno dimostrato un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" per una particolare classe di domini, da loro chiamati domini Goldilocks, che siano anche taut.

Definizione. Una varietà complessa e connessa X si dice *taut* se ogni funzione nella chiusura di $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ è in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ oppure è la funzione costante ∞.

Esempi di domini Goldilocks sono i domini limitati, pseudoconvessi e di tipo finito nel senso di D'Angelo.

Nel 2021 Bharali e Maitra, in [BM], hanno osservato che la dimostrazione fatta in [BZ1] può essere estesa a domini taut che soddisfino una certa condizione per i punti del bordo, detta di visibilità.

Definizione. Sia X una varietà complessa; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$K_X(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C},\ \text{esiste } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ \text{tale che } f(0) = x, \mathrm{d}_0 f(v) = Z\} \tag{1}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.

Definizione. Sia X una varietà complessa e connessa; la *pseudodistanza di Kobayashi* su X è k_X, la forma integrata di K_X.

Se k_X è effettivamente una distanza, X si dice *Kobayashi-iperbolica.*

Si noti che ogni varietà taut è Kobayashi-iperbolica ([Ki1, Proposition 2]).

Definizione. Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; una curva $\sigma : I \longrightarrow X$ è detta una (λ, κ)*-simil-geodetica* se

1. per ogni $s, t \in I$ si ha
$$\frac{1}{\lambda}|t - s| - \kappa \leq k_X\big(\sigma(s), \sigma(t)\big) \leq \lambda|t - s| + \kappa;$$
2. σ è assolutamente continua (quindi $\sigma'(t)$ esiste per quasi ogni $t \in I$) e per quasi ogni $t \in I$ si ha
$$K_X\big(\sigma(t); \sigma'(t)\big) \leq \lambda.$$

Definizione. Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Diciamo che X è (λ, κ)*-visibile* se

1. ogni due punti distinti di X possono essere collegati da una (λ, κ)-simil-geodetica;
2. per ogni coppia di punti $p, q \in \partial_Y X$ con $p \neq q$, esistono in $\overline{X}$ due intorni V e W, di p e q rispettivamente, con chiusura disgiunta, e un compatto K di X tali che ogni (λ, κ)-simil-geodetica in X che collega un punto di V a un punto di W interseca K.

Bharali e Maitra hanno anche dimostrato un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" per domini di tipo topologico finito; inoltre, hanno definito e costruito esempi di una classe di domini, che chiamano domini Caltrop, che sono taut e hanno la condizione di visibilità, ma non sono domini Goldilocks.

Nel preprint [CMS] del 2021 Chandel, Maitra e Sarkar fanno vedere che non è necessario supporre che la varietà sia un dominio, basta che sia una sottovarietà di $\mathbb{C}^n$; costruiscono inoltre altri esempi di domini che soddisfano la condizione di visibilità.

Negli articoli citati finora, sono stati considerati domini e varietà limitati. Il caso di domini illimitati è stato studiato nel 2022 da Bharali e Zimmer nel preprint [BZ2]; considerando il bordo della *end compactification* al posto del bordo euclideo riescono ad ottenere un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" anche per il caso illimitato.

Notiamo inoltre che in [BZ1], [CMS] e [BZ2] vengono anche mostrati dei risultati di estensione al bordo di funzioni olomorfe, isometrie e quasi-isometrie; nei due preprint viene anche evidenziato un legame tra l'estensione al bordo e la condizione di visibilità. Si noti che in alcuni dei teoremi di estensione ritroviamo tra le ipotesi la condizione di Gromov-iperbolicità.

In questa tesi ci poniamo l'obiettivo di generalizzare ulteriormente il teorema di tipo "Wolff-Denjoy" mostrato in [CMS]. Osserviamo come le varie ipotesi giocano un ruolo fondamentale nella dimostrazione di tale teorema:

(i) dall'ipotesi che la varietà sia taut segue la dicotomia tra i due enunciati della tesi, cioè se le orbite non sono relativamente compatte la successione delle iterate dev'essere compattamente divergente;
(ii) dall'ipotesi di limitatezza, grazie al teorema di Montel, segue, a meno di sottosuccessioni, la convergenza uniforme sui compatti a una funzione olomorfa a valori nel bordo della varietà;
(iii) dall'ipotesi di visibilità segue che tale funzione limite dev'essere costante.

Nell'enunciato che vogliamo dimostrare, l'ipotesi che la varietà sia una sottovarietà limitata di $\mathbb{C}^n$ sarà sostituita dall'essere una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa astratta; tale ipotesi ci permetterà di dimostrare teoremi di relativa compattezza di funzioni nello spirito del teorema di Montel.

Ecco il Teorema che ci proponiamo di dimostrare.

Teorema. *Sia X una sottovarietà complessa e relativamente compatta di una varietà Kobayashi-iperbolica Y. Supponiamo che X sia taut e che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.*

Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *le orbite dei punti di X tramite F sono relativamente compatte in X; oppure,*
- *esiste un unico punto di $\partial_Y X$ tale che la successione delle iterate di F converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Nella sezione 1 daremo le definizioni ed enunceremo i risultati alla base della teoria della dinamica olomorfa in più variabili; alcuni verranno anche dimostrati, tra cui una versione generalizzata del teorema di Montel e il fatto che per varietà taut vale una dicotomia nella dinamica delle funzioni olomorfe.

Nella sezione 2 studieremo la condizione di visibilità e vedremo una serie di risultati tecnici, tra cui il fatto che con l'ipotesi di visibilità vale una sorta di teorema di Montel "al bordo" per la successione di iterate di una funzione olomorfa, qualora sia compattamente divergente. A questo punto, i vari risultati ottenuti verranno utilizzati per dare una dimostrazione di un teorema di tipo "Wolff-Denjoy"; nella dimostrazione rimarrà da verificare che il limite è lo stesso per ogni sottosuccessione delle iterate, da cui poi segue facilmente che dev'essere il limite di tutta la successione. Otterremo come corollari i teoremi di tipo "Wolff-Denjoy" dimostrati in [A4] e in [CMS], e quello per i domini di tipo topologico finito dimostrato in [BM].

Nella sezione 3 costruiremo gli esempi citati sopra e vedremo quali ipotesi del teorema soddisfano.

Nella sezione 4 vedremo il caso dei domini illimitati, e citeremo alcuni dei legami tra la condizione di visibilità e i risultati di estensione al bordo.

1 Preliminari

1.1 Notazioni e definizioni di base

Introduciamo le notazioni e definizioni che useremo:

- un *dominio* in $\mathbb{C}^n$ è un aperto connesso;
- una *varietà complessa* di dimensione n è una varietà differenziabile reale, di dimensione $2n$ e tale che i cambi di carta siano olomorfi se considerati fra aperti di $\mathbb{C}^n$;
- dati una varietà complessa X e $x \in X$, indichiamo con T_xX lo spazio tangente complesso a X in x, che nel caso dei domini è canonicamente identificato con $\mathbb{C}^n$;
- nei vari enunciati, quando è data una varietà complessa X sottintendiamo anche di aver fissato una metrica hermitiana $\| \cdot \|_X$ su X, che induce la distanza d_X se X è connessa; quando X è sottovarietà complessa di una varietà complessa Y, fissiamo la metrica hermitiana su Y e consideriamo su X la metrica indotta; se la varietà ambiente è $Y = \mathbb{C}^n$ useremo sempre $\| \cdot \|_{\mathbb{C}^n} = \| \cdot \|$, la metrica euclidea su $\mathbb{C}^n$;
- dati X, Y spazi topologici, $C^0(X, Y)$ è lo spazio delle funzioni continue da X a Y considerato con la topologia compatta-aperta. Nel caso in cui Y sia uno spazio metrico, tale topologia coincide con la topologia della convergenza uniforme sui compatti;
- date X, Y varietà complesse, indichiamo con $\mathrm{Hol}(X, Y)$ l'insieme delle funzioni olomorfe da X a Y, con $\mathcal{O}(X)$ l'insieme delle funzioni olomorfe da X in $\mathbb{C}$ e con $\mathrm{Aut}(X)$ l'insieme dei biolomorfismi di X in sé;
- data $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$, indichiamo con $\mathrm{d}_x f$ il differenziale di f in $x \in X$;
- il disco unitario è $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$; il disco di centro 0 e raggio $r > 0$ è $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$; il disco di centro $a \in \mathbb{C}$ e raggio $r > 0$ è $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$; il polidisco unitario in $\mathbb{C}^n$ è $\mathbb{D}^n = \mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D}$;
- la palla unitaria (euclidea) in $\mathbb{C}^n$ è $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$, dove $\| \cdot \|$ indica la norma euclidea, mentre $\mathbb{B}^n_r = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < r\}$ è la palla (euclidea) di centro l'origine $O \in \mathbb{C}^n$ e raggio $r > 0$;
- dati uno spazio topologico Y e un suo sottoinsieme $A \subseteq Y$, il bordo relativo di A in Y è $\partial_Y A := \overline{A} \setminus A$, dove la chiusura è fatta in Y; se $Y = \mathbb{C}^n$ allora $\partial_{\mathbb{C}^n} A = \partial A$ è il bordo euclideo;
- dato un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ e $z \in \mathbb{C}^n$, scriviamo $\delta_\Omega(z) = \inf\limits_{p \in \partial\Omega} \|z - p\|$ per indicare la distanza euclidea di x dal bordo euclideo di Ω.

Ricordiamo cosa sono la metrica e la distanza di Poincaré in $\mathbb{D}$.

Definizione 1.1.1. La *metrica di Poincaré* (o *iperbolica*) su $\mathbb{D}$ è data da

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z; v) = \frac{1}{1 - |z|^2} |v| \tag{2}$$

per ogni $z \in \mathbb{D}$ e $v \in \mathbb{C} \cong T_z\mathbb{D}$. La metrica $\lambda_{\mathbb{D}}$ è hermitiana di curvatura gaussiana costante uguale a -4 (si veda [Ah, Section 1-5]).

Definizione 1.1.2. La *distanza di Poincaré* (o *iperbolica*) ω su $\mathbb{D}$ è la forma integrata della metrica di Poincaré. È una distanza completa la cui espressione è data da

$$\omega(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right|}{1 - \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right|} = \operatorname{arctanh} \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| \tag{3}$$

per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ (si veda [Ah, Section 1-1]).

Oltre ad avere curvatura negativa costante, la metrica e la distanza di Poincaré sono tali che le funzioni olomorfe dal disco unitario in sé sono semicontrazioni rispetto ad esse.

Lemma 1.1.3. *(lemma di Schwarz-Pick) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora per ogni $z, w \in \mathbb{D}$ si ha*

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z - w}{1 - \bar{w}z}\right| \quad e \quad \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2};$$

inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per z_0, w_0 con $z_0 \neq w_0$ o nella seconda per z_0 allora $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ e vale sempre l'uguaglianza.

Per la dimostrazione si rimanda a [Ko2, Chapter I, Theorem 1.1].

Corollario 1.1.4. *Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Allora si ha*

$$\omega\big(f(z), f(w)\big) \leq \omega(z, w) \tag{4}$$

per ogni $z, w \in \mathbb{D}$.

Dimostrazione. Discende dal lemma di Schwarz-Pick e dal fatto che la funzione arctanh è strettamente crescente. □

Ci tornerà utile anche la versione semplificata del lemma di Schwarz-Pick.

Lemma 1.1.5. *(lemma di Schwarz) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tale che $f(0) = 0$. Allora per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$; inoltre, se vale l'uguaglianza nella prima per $z_0 \neq 0$ oppure nella seconda allora $f(z) = e^{i\theta} z$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$.*

Enunciamo adesso dei fatti noti sulle geodetiche del disco unitario con la metrica di Poincaré. Visto che ne parleremo più in generale, diamo la definizione per spazi metrici.

Definizione 1.1.6. Siano (X, d) uno spazio metrico e $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una curva $\sigma : I \longrightarrow X$ è detta *geodetica* se

$$d\big(\sigma(t_1), \sigma(t_2)\big) = |t_1 - t_2|$$

per ogni $t_1, t_2 \in I$.

Osservazione 1.1.7. Dati una geodetica $\sigma : I \longrightarrow X$ e $a, b \in I$, si ha

$$d\big(\sigma(a), \sigma(b)\big) = \inf_{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b} \sum_{j=1}^{n} d\big(\sigma(t_{j-1}), \sigma(t_j)\big);$$

cioè, le geodetiche sono le curve che "minimizzano la lunghezza".

Proposizione 1.1.8. *Le geodetiche di $(\mathbb{D}, \omega)$ sono i diametri di $\mathbb{D}$ e le intersezioni con $\mathbb{D}$ dei cerchi euclidei ortogonali a $\partial\mathbb{D}$. In particolare, ogni coppia di punti distinti è connessa da un'unica geodetica.*

Per una dimostrazione si veda [A6, point (iv) of Proposition 1.2.7].

Quello che vogliamo fare ora è generalizzare la metrica e la distanza di Poincaré a una qualsiasi varietà complessa mantenendo la proprietà di rendere le funzioni olomorfe delle semicontrazioni. Ci sono vari modi per farlo, noi nello specifico vedremo la (pseudo)metrica e la (pseudo)distanza di Kobayashi, introdotte nel 1967 in [Ko1].

Definizione 1.1.9. Sia X una varietà complessa; la *pseudometrica di Kobayashi* su X è

$$\begin{aligned} K_X(x; Z) = &\inf\{|v| \mid v \in \mathbb{C}, \text{ esiste } f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ &\text{tale che } f(0) = x, \mathrm{d}_0 f(v) = Z\} \end{aligned} \tag{5}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.

Osservazione 1.1.10. Non possiamo sempre parlare di metrica perché, per esempio, $K_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$. Infatti, dati $z \in \mathbb{C}^n$ e $Z \in T_z\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$, abbiamo che la funzione $f_\varepsilon \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$ data da $f_\varepsilon(\zeta) = z + \zeta Z/\varepsilon$ è tale che $\mathrm{d}_0 f_\varepsilon(\varepsilon) = Z$ per ogni $\varepsilon > 0$; di conseguenza, $K_{\mathbb{C}^n}(z; Z) = 0$.

Vediamo adesso che le funzioni olomorfe sono semicontrazioni rispetto alla pseudometrica di Kobayashi.

Proposizione 1.1.11. *Siano X e Y varietà complesse, e sia $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$. Allora si ha*

$$K_Y\big(f(x); \mathrm{d}_x f(Z)\big) \leq K_X(x; Z) \tag{6}$$

per ogni $x \in X$ e $Z \in T_x X$.

Dimostrazione. Dati $x \in X$ e $Z \in T_x X$, poniamo

$$\begin{aligned} A_X(x; Z) = &\{v \in \mathbb{C} \mid \text{esiste } g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \\ &\text{tale che } g(0) = x, \mathrm{d}_0 g(v) = Z\}, \end{aligned}$$

e sia $A_Y\big(f(x); \mathrm{d}_x f(Z)\big)$ definito analogamente. Per definizione,

$$K_X(x; Z) = \inf\{|v| \mid v \in A_X(x; Z)\}$$

e

$$K_Y\big(f(x); \mathrm{d}_x f(Z)\big) = \inf\{|v| \mid v \in A_Y\big(f(x); \mathrm{d}_x f(Z)\big)\};$$

quindi ci basta mostrare che $A_X(x;Z) \subseteq A_Y\big(f(x); \mathrm{d}_x f(Z)\big)$. Dato $v \in A_X(x;Z)$, prendiamo $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ tale che $g(0) = x$ e $\mathrm{d}_0 g(v) = Z$. Allora abbiamo $(f \circ g)(0) = f(x)$ e $\mathrm{d}_0(f \circ g)(v) = (\mathrm{d}_x f \circ \mathrm{d}_0 g)(v) = \mathrm{d}_x f(Z)$; dunque $v \in A_Y\big(f(x); \mathrm{d}_x f(Z)\big)$. Perciò $A_X(x;Z) \subseteq A_Y\big(f(x); \mathrm{d}_x f(Z)\big)$, come voluto. □

Nei casi a cui saremo interessati, la pseudometrica di Kobayashi è effettivamente una metrica.

Proposizione 1.1.12. *Sia X una sottovarietà complessa e limitata di $\mathbb{C}^n$. Allora K_X è una metrica, cioè $K_X(z;Z) > 0$ per ogni $z \in X$ e $0 \neq Z \in T_z X$.*

Dimostrazione. È un'immediata conseguenza di un risultato più forte che dimostreremo nella prossima sezione, il punto (3) della Proposizione 2.2.2. □

Definiamo adesso la (pseudo)distanza di Kobayashi; più avanti vedremo com'è collegata alla pseudometrica di Kobayashi.

Definizione 1.1.13. Sia X una varietà complessa e connessa; la *pseudodistanza di Kobayashi* su X è data da

$$k_X(z,w) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{m} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{esistono } m \in \mathbb{N}, \text{ punti } \zeta_0, \dots, \zeta_m \in \mathbb{D} \text{ e} \\ \text{funzioni } \varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \text{ tali che } \varphi_1(\zeta_0) = z, \varphi_m(\zeta_m) = w \\ \text{e } \varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j) \text{ per } j = 1, \dots, m-1 \end{array} \right\} \tag{7}$$

per $z, w \in X$.

Osservazione 1.1.14. È facile vedere che k_X è una pseudodistanza, ma in generale non è una distanza, ad esempio perché, come prima, $k_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$. Infatti, dati $z, w \in X$, possiamo considerare i punti $\zeta_0 = 0$ e $1 > \zeta_1 = \varepsilon > 0$ e la funzione $\varphi_1 \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$ tale che $\varphi_1(\zeta) = z + \zeta(w - z)/\varepsilon$. Si ha $\varphi_1(\zeta_0) = z$ e $\varphi_1(\zeta_1) = w$; perciò, per definizione, $k_{\mathbb{C}^n}(z,w) \leq \omega(0, \varepsilon)$ per ogni $1 > \varepsilon > 0$, da cui $k_{\mathbb{C}^n}(z,w) = 0$.

Vedremo però più avanti (Osservazione 1.2.8) che se X è una sottovarietà complessa, connessa e limitata di $\mathbb{C}^n$ allora k_X è effettivamente una distanza.

Vediamo adesso che le funzioni olomorfe sono delle semicontrazioni rispetto alla pseudodistanza di Kobayashi.

Proposizione 1.1.15. *Siano X e Y varietà complesse e connesse, e consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$. Allora*

$$k_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq k_X(x,y) \tag{8}$$

per ogni $x, y \in X$.

Dimostrazione. Dati $x, y \in X$, poniamo

$$A_X(x,y) = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \omega(\zeta_{j-1},\zeta_j) \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{esistono } m \in \mathbb{N}, \text{ punti } \zeta_0,\dots,\zeta_m \in \mathbb{D} \text{ e} \\ \text{funzioni } \varphi_1,\dots,\varphi_m \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},X) \text{ tali che } \varphi_1(\zeta_0)=x, \varphi_m(\zeta_m)=y \\ \text{e } \varphi_j(\zeta_j)=\varphi_{j+1}(\zeta_j) \text{ per } j=1,\dots,m-1 \end{array} \right\},$$

e sia $A_Y\big(f(x),f(y)\big)$ definito analogamente. Per definizione,

$$k_X(x,y) = \inf A_X(x,y) \quad \text{e} \quad k_Y\big(f(x),f(y)\big) = \inf A_Y\big(f(x),f(y)\big);$$

quindi ci basta mostrare che $A_X(x,y) \subseteq A_Y\big(f(x),f(y)\big)$. Dati $\zeta_0,\dots,\zeta_m \in \mathbb{D}$ e $\varphi_1,\dots,\varphi_m \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},X)$ che realizzano $\sum\limits_{j=1}^{m} \omega(\zeta_{j-1},\zeta_j)$ in $A_X(x,y)$, si verifica immediatamente che $\zeta_0,\dots,\zeta_m \in \mathbb{D}$ e $f \circ \varphi_1,\dots,f\circ\varphi_m \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},Y)$ realizzano lo stesso numero in $A_Y\big(f(x),f(y)\big)$. Perciò $A_X(x,y) \subseteq A_Y\big(f(x),f(y)\big)$, come voluto. □

Segue immediatamente l'invarianza per biolomorfismi.

Corollario 1.1.16. *Siano X e Y varietà complesse e connesse, e consideriamo un biolomorfismo $f : X \longrightarrow Y$. Allora*

$$k_Y\big(f(x),f(y)\big) = k_X(x,y) \tag{9}$$

per ogni $x, y \in X$.

Definizione 1.1.17. Una varietà complessa e connessa X è *Kobayashi-iperbolica* se k_X è una distanza.

Osservazione 1.1.18. Dalla definizione di k_X segue che ogni varietà Kobayashi-iperbolica è uno *spazio di lunghezze* nel senso di [BH, Part I, Definition 3.1].

Il seguente risultato per le varietà Kobayashi-iperboliche verrà spesso usato implicitamente.

Proposizione 1.1.19. *(Barth, [B2]) Sia X una varietà complessa e connessa. Allora X è Kobayashi-iperbolica se e solo se k_X vi induce la topologia di varietà.*

1.2 Risultati noti della teoria

Vediamo ora alcuni risultati noti della teoria che ci saranno utili nelle nostre dimostrazioni. Cominciamo con alcuni teoremi noti dell'analisi complessa in più variabili.

Teorema 1.2.1. *(Weierstrass, [N, Chapter 1, Proposition 5]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. Sia $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ una successione che converge uniformemente sui compatti a $f \in C^0(\Omega)$; allora $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

Definizione 1.2.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. Una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ si dice *uniformemente limitata sui compatti* se per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esiste una costante $M_K > 0$ tale che $|f(z)| \leq M_K$ per ogni $f \in \mathcal{F}$ e $z \in K$.

Teorema 1.2.3. *(Montel, [N, Chapter 1, Proposition 6]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$, una famiglia uniformemente limitata sui compatti; allora è relativamente compatta in $\mathcal{O}(\Omega)$.*

Teorema 1.2.4. *(Serre, Ehrenpreis, [Kr, Theorem 1.2.6]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato, con $n > 1$. Sia K un sottoinsieme compatto di Ω tale che $\Omega \setminus K$ è connesso. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$, allora esiste $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $F|_{\Omega\setminus K} = f$.*

Il seguente fatto verrà usato spesso.

Lemma 1.2.5. *Siano (X, d) uno spazio metrico e Y uno spazio topologico tale che esista una successione $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di compatti di Y con la seguente proprietà: per ogni compatto $K \subseteq Y$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $K \subseteq K_n$. Allora $C^0(Y, X)$ è metrizzabile.*

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $f, g \in C^0(Y, X)$ poniamo

$$d_n(f, g) = \sup_{x\in K_n} d\big(f(x), g(x)\big);$$

definiamo

$$\tilde{d}(f, g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(f, g)}{1 + d_n(f, g)}.$$

È facile verificare che $\tilde{d}$ è una distanza, che induce proprio la topologia della convergenza uniforme sui compatti. □

Corollario 1.2.6. *Siano Y una varietà e X una varietà o la compattificazione di Alexandroff di una varietà. Allora $C^0(Y, X)$ è metrizzabile; in particolare, un suo sottoinsieme è chiuso (rispettivamente, compatto) se e solo se è chiuso (rispettivamente, compatto) per successioni.*

Dimostrazione. Basta verificare le ipotesi del Lemma 1.2.5. Che esista una successione di compatti come quella del lemma per Y segue dal fatto che è una varietà, per cui ci rimane da verificare che X sia metrizzabile. Questo è noto nel caso in cui sia una varietà, e segue da [Ke, 4.16] nel caso in cui sia la compattificazione di Alexandroff di una varietà. □

Vediamo adesso l'espressione esplicita per k_X in un paio di casi particolari, dalla quale discende un'importante conseguenza.

Proposizione 1.2.7. *([Roy, Section 1 and Section 2]) Valgono le seguenti affermazioni:*

(i) la distanza di Poincaré e la pseudodistanza di Kobayashi di $\mathbb{D}$ coincidono;

(ii) dati $z = (z_1, \dots, z_n)$ e $w = (w_1, \dots, w_n)$ in $\mathbb{D}^n$, si ha

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) = \max_{j=1,\dots,n} \{\omega(z_j, w_j)\};$$

(iii) dati $r_1, \dots, r_n > 0$ e $z_j \in \mathbb{D}_{r_j}, Z_j \in T_{z_j}\mathbb{D}_{r_j} = \mathbb{C}$ per $j = 1, \dots, n$, posti $z = (z_1, \dots, z_n)$, $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ e $D = \mathbb{D}_{r_1} \times \cdots \times \mathbb{D}_{r_n}$ si ha

$$K_D(z; Z) \leq \max_{j=1,\dots,n} \frac{r_j |Z_j|}{r_j^2 - |z_j|^2}.$$

Dimostrazione. (i) Che $k_{\mathbb{D}} \geq \omega$ segue dal lemma di Schwarz-Pick e dalla disuguaglianza triangolare per la distanza di Poincaré; per avere l'uguaglianza, basta notare che il minimo nella definizione di $k_{\mathbb{D}}$ è effettivamente raggiunto usando l'identità.

(ii) Poiché le proiezioni nelle varie coordinate sono funzioni olomorfe, per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) \geq k_{\mathbb{D}}(z_j, w_j) = \omega(z_j, w_j),$$

dove la disuguaglianza segue dalla Proposizione 1.1.15 e l'uguaglianza dal punto (i).

Per mostrare che il minimo è effettivamente raggiunto, ricordiamo che dal Corollario 1.1.16 segue che $k_{\mathbb{D}^n}$ e $k_{\mathbb{D}} = \omega$ sono invarianti per biolomorfismi. Consideriamo allora $f_1, \dots, f_n \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ tali che $f_j(z_j) = 0$ per ogni $j = 1, \dots, n$, e poniamo $f = f_1 \times \cdots \times f_n \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}^n)$. Abbiamo quindi

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) = k_{\mathbb{D}^n}\big(f(z), f(w)\big) = k_{\mathbb{D}^n}\big(O, f(w)\big)$$

e

$$\max_{j=1,\dots,n} \{\omega(z_j, w_j)\} = \max_{j=1,\dots,n} \big\{\omega\big(f_j(z_j), f_j(w_j)\big)\big\} = \max_{j=1,\dots,n} \big\{\omega\big(0, f_j(w_j)\big)\big\};$$

possiamo dunque supporre, senza perdita di generalità, $z = O$.

Allora, detto j_0 l'indice per cui $\omega(0, w_{j_0})$ è massimo, si ha che anche $|w_{j_0}|$ è massimo. Consideriamo, per ogni $j = 1, \dots, n$, la funzione $g_j \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ data da $g_j(\zeta) = \zeta \cdot w_j / w_{j_0}$, di modo che $g_j(w_{j_0}) = w_j$. Poniamo $\varphi = (g_1, \dots, g_n)$, per cui $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}^n)$; inoltre, $\varphi(z_{j_0}) = \varphi(0) = O = z$ e $\varphi(w_{j_0}) = w$. Si ha dunque, per definizione, che

$$k_{\mathbb{D}^n}(z, w) \leq \omega(0, w_{j_0}) = \max_{j=1,\dots,n} \omega(0, w_j) = \max_{j=1,\dots,n} \omega(z_j, w_j),$$

come voluto.

(iii) A meno di riscalare tutto per una costante, possiamo supporre che il membro destro sia uguale a 1 (se fosse 0, avremmo $Z = 0$ e la tesi sarebbe immediata). Consideriamo la funzione $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, D)$ che manda $\zeta \in \mathbb{D}$ nell'elemento di D che ha come j-esima coordinata $\dfrac{r_j \alpha_j \zeta + z_j}{1 + \bar{z}_j \alpha_j \zeta / r_j}$, dove $\alpha_j = \dfrac{r_j Z_j}{r_j^2 - |z_j|^2}$; allora $f(0) = z, Df(0) \cdot 1 = Z$ e la disuguaglianza discende dalla definizione di K_D. $\square$

Corollario 1.2.8. *Le sottovarietà complesse e connesse di varietà Kobayashi-iperboliche sono Kobayashi-iperboliche.*

In particolare, le sottovarietà complesse, connesse e limitate di $\mathbb{C}^n$ sono Kobayashi-iperboliche e i domini limitati di $\mathbb{C}^n$ sono Kobayashi-iperbolici.

Dimostrazione. Siano Y una varietà Kobayashi-iperbolica e X una sottovarietà complessa e connessa di Y. In particolare, l'inclusione di X in Y è una funzione olomorfa; allora, dati $x, y \in X$ con $x \neq y$, per la Proposizione 1.1.15 si ha che $k_X(x, y) \geq k_Y(x, y) > 0$, per cui X è Kobayashi-iperbolica, come voluto.

Se invece X è una sottovarietà complessa, connessa e limitata o un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$, esiste $r > 0$ tale che $\Omega \subseteq \mathbb{D}_r^n$ e tale per cui l'inclusione di X in $\mathbb{D}_r^n$ è un embedding. Dal punto (ii) della Proposizione 1.2.7 abbiamo che $k_{\mathbb{D}^n}$ è effettivamente una distanza; poiché dal Corollario 1.1.16 sappiamo che k_X è invariante per biolomorfismi, segue che anche $k_{\mathbb{D}_r^n}$ è una distanza. $\square$

Citiamo ora un risultato che lega pseudometrica e pseudodistanza di Kobayashi.

Definizione 1.2.9. Sia X una varietà complessa e connessa, e consideriamo una curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ tale che la funzione $K_X\big(\gamma(\cdot); \gamma'(\cdot)\big)$ sia integrabile su $[a, b]$. La *lunghezza di γ in X rispetto alla pseudometrica di Kobayashi* è

$$l_X(\gamma) := \int_a^b K_X\big(\gamma(t); \gamma'(t)\big)\, \mathrm{d}t.$$

Teorema 1.2.10. *([Roy, Theorem 1] e [V, Theorem 3.1]) Sia X una varietà complessa e connessa. Per ogni $z, w \in X$ abbiamo che:*

(i) $k_X(z, w) = \inf\{l_X(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \longrightarrow X$ *è* C^1 *a tratti,* $\gamma(a) = z, \gamma(b) = w\}$*;*

(ii) $k_X(z,w) = \inf\{l_X(\gamma) \mid \gamma : [a,b] \longrightarrow X$ *è assolutamente continua rispetto a* $d_X, \gamma(a) = z, \gamma(b) = w\}$.

Qui, d_X *è la distanza indotta dalla metrica hermitiana* $\|\cdot\|_X$*, e* $l_X(\gamma)$ *è ben definita in entrambi i casi.*

Introduciamo adesso il concetto di varietà taut, che sarà per noi un'ipotesi importante per ciò che andremo a dimostrare: infatti, quest'ipotesi ci darà la dicotomia nella tesi dei teoremi di tipo "Wolff-Denjoy". Vedremo anche con un esempio l'importanza di tale ipotesi. Prima di dare la definizione, ci servirà un risultato sul comportamento delle funzioni olomorfe a valori in una varietà Kobayashi-iperbolica; non lo dimostreremo tutto, ma per la parte che andremo a mostrare avremo bisogno del ben noto teorema di Ascoli-Arzelà. Per una dimostrazione si veda [Ke, Chapter 7, Theorem 17].

Teorema 1.2.11. *(Ascoli-Arzelà) Siano* X *uno spazio metrico e* Y *uno spazio metrico localmente compatto. Allora un famiglia* $\mathcal{F} \subseteq C^0(Y,X)$ *è relativamente compatta in* $C^0(Y,X)$ *se e solo se le seguenti due condizioni sono soddisfatte:*

(i) $\mathcal{F}$ *è equicontinua;*
(ii) l'insieme $\{f(y) \mid f \in \mathcal{F}\}$ *è relativamente compatto in* X *per ogni* $y \in Y$.

Lemma 1.2.12. *([B1, Theorem 1]) Siano* X *una varietà complessa e* d *una distanza su* X *compatibile con la topologia di varietà. Supponiamo che* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D},X)$ *sia equicontinuo rispetto a* d*; allora* $\mathrm{Hol}(W,X)$ *è equicontinuo rispetto a* d *per ogni varietà complessa* W.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista una varietà complessa W per cui ciò non valga; allora esistono $\varepsilon > 0$, un punto $\tilde{w} \in W$ e due successioni $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq W$ e $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(W,X)$ tali che $w_\nu \longrightarrow \tilde{w}$ per $\nu \longrightarrow +\infty$ e $d\big(f_\nu(w_\nu), f_\nu(\tilde{w})\big) \geq \varepsilon$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$. Scegliendo un opportuno sistema di coordinate locali e a meno di sottosuccessioni, possiamo assumere che W sia una qualche $\mathbb{B}^n$ e prendere $\tilde{w} = 0$.

Definiamo $g_\nu \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},X)$ come $g_\nu(\zeta) = f_\nu(\zeta w_\nu/\|w_\nu\|)$; allora $\|w_\nu\| \longrightarrow 0$ per $\nu \longrightarrow +\infty$ e

$$d\big(g_\nu(\|w_\nu\|), g_\nu(0)\big) = d\big(f_\nu(w_\nu), f_\nu(\tilde{w})\big) \geq \varepsilon$$

per ogni $\nu \in \mathbb{N}$, in contraddizione con l'ipotesi che $\mathrm{Hol}(\mathbb{D},X)$ sia equicontinuo rispetto a d. $\square$

Proposizione 1.2.13. *([A5, Theorem 1.3]) Sia* X *una varietà complessa e connessa. Allora* X *è Kobayashi-iperbolica se e solo se* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D},X)$ *è relativamente compatto in* $C^0(\mathbb{D},X^*)$*, dove* X^* *è la compattificazione di Alexandroff di* X.

Inoltre, se X *è Kobayashi-iperbolica allora* $\mathrm{Hol}(Y,X)$ *è relativamente compatto in* $C^0(Y,X^*)$ *per ogni varietà complessa* Y.

Dimostrazione. Dimostriamo solamente che se X è Kobayashi-iperbolica allora $\mathrm{Hol}(Y, X)$ è relativamente compatto in $C^0(Y, X^*)$ per ogni varietà complessa Y, dando per buona la prima parte. Poiché X è una varietà, per [Ke, 4.16] possiamo fissare una distanza d su X^* che induca la topologia della compattificazione. Dato che $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ è relativamente compatto in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$, per il teorema di Ascoli-Arzelà è equicontinuo.

Data una varietà complessa Y, per il Lemma 1.2.12, considerando su X la distanza $d|_X$, si ha che $\mathrm{Hol}(Y, X)$ è equicontinuo; per compattezza di X^* valgono le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà, per cui abbiamo che è relativamente compatto in $C^0(Y, X^*)$, come voluto. $\square$

Definizione 1.2.14. Una varietà complessa X si dice *taut* se è Kobayashi-iperbolica e ogni funzione nella chiusura di $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ è in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ oppure è la funzione costante ∞.

Strettamente legato al concetto di varietà taut è quello di varietà tautly embedded, ipotesi che può essere interpretata dicendo che per una certa sottovarietà complessa di una varietà complessa ambiente vale una forma del teorema di Montel.

Definizione 1.2.15. Sia X una sottovarietà complessa di una varietà complessa Y. Diciamo che X è *tautly embedded* in Y se $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ è relativamente compatto in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, Y)$.

Proposizione 1.2.16. *(Generalizzazione di [Ki2, Theorem 1]) Sia X una sottovarietà complessa di una varietà complessa Y. Allora X è tautly embedded in Y se e solo se* $\mathrm{Hol}(W, X)$ *è relativamente compatto in* $\mathrm{Hol}(W, Y)$ *per ogni varietà complessa W.*

La dimostrazione, presa da [A2, Proposition 2.1.4, point (i)], ricalca quella del risultato originale.

Dimostrazione. Un'implicazione è immediata. Viceversa, supponiamo che X sia tautly embedded in Y, cioè che $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ sia relativamente compatto in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, Y)$. Dato che Y è una varietà, è Hausdorff, per cui le mappe costanti, che indichiamo con $\mathrm{cost}(\mathbb{D}, Y)$, sono un chiuso di $C^0(\mathbb{D}, Y)$ omeomorfo a Y; in particolare, la chiusura di $\mathrm{cost}(\mathbb{D}, X)$ in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, Y)$ è contenuta sia nella chiusura di $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$, che è un compatto, sia in $\mathrm{cost}(\mathbb{D}, Y)$, che è un chiuso. Dunque è un compatto e, a meno di omeomorfismo, coincide con la chiusura di X in Y; segue che X è relativamente compatta in Y.

Dato che Y è una varietà, per [Ke, 4.16] possiamo fissare una distanza d su Y che induce la topologia di varietà. Per definizione, $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ è relativamente compatto in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, Y)$, per cui anche in $C^0(\mathbb{D}, Y)$ in quanto quest'ultimo è Hausdorff perché lo è Y; per Ascoli-Arzelà, segue che $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ è equicontinuo rispetto a d. Per il Lemma 1.2.12 si ha che $\mathrm{Hol}(W, X)$ è equicontinuo rispetto a d per ogni varietà complessa W; inoltre, poiché $\mathrm{Hol}(W, Y \setminus \overline{X})$ è aperto, la chiusura di $\mathrm{Hol}(W, X)$ in $\mathrm{Hol}(W, Y)$ è contenuta in $C^0(W, \overline{X})$. Dato che $\overline{X}$ è compatto, possiamo applicare Ascoli-Arzelà per ottenere che $\mathrm{Hol}(W, X)$ è relativamente compatto in $C^0(W, Y)$. Per il Corollario 1.2.6, la chiusura di $\mathrm{Hol}(W, X)$ in $C^0(W, Y)$ coincide con la chiusura per successioni. Per il teorema di Weierstrass, applicato in carte opportune, tale chiusura è contenuta in $\mathrm{Hol}(W, Y)$, da cui la tesi. $\square$

Vale anche il seguente fatto.

Proposizione 1.2.17. *Sia X una sottovarietà complessa e relativamente compatta di una varietà taut Y. Allora X è tautly embedded in Y.*

Dimostrazione. Poiché X è relativamente compatta in Y, nessuna successione in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ è compattamente divergente; essendo X taut, per definizione segue che $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ è relativamente compatto in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, Y)$, come voluto. $\square$

Dalla dimostrazione della Proposizone 1.2.16 segue che tautly embedded implica relativamente compatta (e per la Proposizione 1.2.17 vale anche l'implicazione inversa se la varietà ambiente è taut). Inizialmente la generalizzazione del teorema di tipo "Wolff-Denjoy" che avevamo intenzione di dimostrare richiedeva l'ipotesi tautly embedded, ma sfruttando i risultati di [BZ2] è stato possibile generalizzare ulteriormente e richiedere solo la relativa compattezza.

Diamo ora delle definizioni che ci serviranno per parlare del comportamento delle iterate di funzioni olomorfe, partendo dalla definizione stessa di iterata.

Definizione 1.2.18. Dati un insieme X e una funzione $f : X \longrightarrow X$, poniamo induttivamente $f^0 = \mathrm{id}_X$ e $f^{k+1} = f \circ f^k$. Chiamiamo f^k l'*iterata* k-esima di f e, per ogni $x \in X$, l'*orbita* di x tramite f è l'insieme $\{f^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Definizione 1.2.19. Siano X e Y due spazi topologici. Diciamo che una successione $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq C^0(X, Y)$ è *compattamente divergente* se, per ogni coppia di compatti $H \subseteq X$ e $K \subseteq Y$, esiste $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tale che $f_\nu(H) \cap K = \varnothing$ per ogni $\nu \geq \nu_0$.

Una famiglia $\mathcal{F} \subseteq C^0(X, Y)$ è detta *normale* se ogni successione in $\mathcal{F}$ ammette una sottosuccessione che converge a una funzione in $C^0(X, Y)$ oppure è compattamente divergente.

Adesso vogliamo arrivare a dire che l'ipotesi taut ci permette di ottenere la dicotomia sul comportamento delle iterate delle funzioni olomorfe. Per farlo, ci servono prima alcuni risultati.

Iniziamo dando una caratterizzazione equivalente all'essere taut per una varietà.

Proposizione 1.2.20. *Una varietà complessa e connessa X è taut se e solo se la famiglia* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ *è normale.*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia taut e consideriamo una successione $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$. Per definizione X è Kobayashi-iperbolica; dunque, per la Proposizione 1.2.13, la chiusura di $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ è compatta in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$; per il Corollario 1.2.6, è compatta per successioni. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{\nu_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ che converge, uniformemente sui compatti, a una qualche funzione f. Se $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ abbiamo concluso; altrimenti, poiché X è taut, f è la funzione costante ∞. Ma, dalla definizione della compattificazione di Alexandroff, una successione in $C^0(\mathbb{D}, X)$ converge in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$ alla funzione costante ∞ se e solo se è compattamente divergente; quindi $\{f_{\nu_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ è compattamente divergente. In ogni caso, possiamo concludere che $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ è normale.

Supponiamo adesso che $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ sia normale. Se f è una funzione nella sua chiusura in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$, allora è il limite di una successione in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$. Poiché questa famiglia è normale, possiamo trovare una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti oppure è compattamente divergente, ma dovrà comunque convergere a f. Allora nel primo caso, applicando il teorema di Weierstrass in carte opportune, troviamo che $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$, mentre nel secondo caso è la funzione costante ∞. Dunque X è taut. $\square$

Si può dimostrare qualcosa di più.

Proposizione 1.2.21. *([B1, Theorem 2]) Sia X una varietà taut. Allora $\mathrm{Hol}(Y, X)$ è una famiglia normale per ogni varietà complessa Y.*

Dimostrazione. Come fatto nella dimostrazione della Proposizione 1.2.20, possiamo fissare una distanza d su X^* compatibile con la sua topologia. Poiché X è taut si ha che $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \cup \{\infty\}$ è compatto in $C^0(\mathbb{D}, X^*)$, da cui, per Ascoli-Arzelà, abbiamo che è equicontinuo rispetto a d. Allora, per il Lemma 1.2.12, $\mathrm{Hol}(Y, X)$ è equicontinuo rispetto a d per ogni varietà complessa Y.

Supponiamo adesso che esista una varietà complessa Y tale che $\mathrm{Hol}(Y, X)$ non sia normale. Allora $\mathrm{Hol}(Y, X) \cup \{\infty\}$ non è un compatto di $C^0(Y, X^*)$; dato che è equicontinuo rispetto a d, per Ascoli-Arzelà abbiamo che non è un chiuso di $C^0(Y, X^*)$. Per il Corollario 1.2.6, $\mathrm{Hol}(Y, X) \cup \{\infty\}$ non è chiuso se e solo se non è chiuso per successioni, cioè esiste una successione $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(Y, X)$ convergente, uniformemente sui compatti, a una funzione $f \in C^0(Y, X^*)$ che non sta né in $C^0(Y, X)$ (altrimenti starebbe in $\mathrm{Hol}(Y, X)$, per Weierstrass applicato a carte opportune) né è la funzione costante ∞. Allora è facile mostrare che esiste un punto $z_0 \in Y$ tale che $f(z_0) = \infty$ e f non è identicamente ∞ in ogni intorno di z_0. Inoltre, scegliendo un opportuno sistema di coordinate locali, possiamo assumere senza perdita di generalità che Y sia una qualche $\mathbb{B}^n$ e che $z_0 = 0$.

Dato che $f \not\equiv \infty$, esiste $z_1 \in \mathbb{B}^n$ tale che $f(z_1) \neq \infty$. Possiamo allora definire le funzioni $g_\nu \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ e $g \in C^0(\mathbb{D}, X^*)$ come $g_\nu(\zeta) = f_\nu(\zeta z_1/\|z_1\|)$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ e $g(\zeta) = f(\zeta z_1/\|z_1\|)$. Allora $g_\nu \longrightarrow g$ per $\nu \longrightarrow +\infty$ uniformemente sui compatti, ma $g \notin C^0(\mathbb{D}, X) \cup \{\infty\}$, in contraddizione con il fatto che l'insieme $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X) \cup \{\infty\}$ è un compatto, e in particolare un chiuso (per successioni), di $C^0(\mathbb{D}, X^*)$, che abbiamo già visto essere metrizzabile. $\square$

Adesso vogliamo mostrare che tutte le varietà X Kobayashi-iperboliche tali che k_X è una distanza completa sono taut.

Definizione 1.2.22. Sia X una varietà Kobayashi-iperbolica. Dati $x \in X$ e $r > 0$, la *palla di centro x e raggio r rispetto alla distanza di Kobayashi* è

$$B_X(x, r) := \{y \in X \mid k_X(x, y) < r\}.$$

Inoltre, dato $A \subseteq X$ poniamo $B_X(A, r) := \bigcup_{x \in A} B_X(x, r)$.

Lemma 1.2.23. *Siano X una varietà Kobayashi-iperbolica, $z_0 \in X$ e $r_1, r_2 > 0$. Allora*

$$B_X\big(B_X(z_0, r_1), r_2\big) = B_X(z_0, r_1 + r_2).$$

Dimostrazione. L'inclusione $B_X\big(B_X(z_0, r_1), r_2\big) \subseteq B_X(z_0, r_1 + r_2)$ segue dalla disuguaglianza triangolare.

Per l'altra inclusione, consideriamo $z \in B_X(z_0, r_1 + r_2)$ e prendiamo $\varepsilon > 0$ tale che $3\varepsilon = r_1 + r_2 - k_X(z_0, z)$. Adesso, se $k_X(z_0, z) < r_1$ la conclusione è immediata; assumiamo dunque che $k_X(z_0, z) \geq r_1$, per cui si ha $r_2 - \varepsilon > 0$. Supponiamo che $r_1 \leq \varepsilon$. Allora $k_X(z_0, z) = r_1 + r_2 - 3\varepsilon < r_2$ e anche in questo caso la conclusione segue. Perciò, assumiamo anche che $r_1 - \varepsilon > 0$.

Dalla definizione di k_X, esistono $\zeta_0, \ldots, \zeta_m \in \mathbb{D}$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ tali che $\varphi_1(\zeta_0) = z_0$, $\varphi_m(\zeta_m) = z$, $\varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j)$ per $j = 1, \ldots, m-1$ e

$$r_1 - \varepsilon < k_X(z_0, z) \leq \sum_{j=1}^{m} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) < k_X(z_0, z) + \varepsilon = r_1 + r_2 - 2\varepsilon.$$

Sia $\mu \leq m$ il più grande intero tale che

$$\sum_{j=1}^{\mu-1} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) < r_1 - \varepsilon,$$

che esiste perché $r_1 - \varepsilon > 0$. Prendiamo η_μ il punto sulla geodetica congiungente $\zeta_{\mu-1}$ e ζ_μ tale che

$$\sum_{j=1}^{\mu-1} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j) + \omega(\zeta_{\mu-1}, \eta_\mu) = r_1 - \varepsilon,$$

che esiste perché $r_1 + r_2 - 2\varepsilon > r_1 - \varepsilon$ e per definizione di μ. Prendendo dunque $w = \varphi_\mu(\eta_\mu)$ abbiamo $k_X(z_0, w) < r_1$, cioè $w \in B_X(z_0, r_1)$. Inoltre, per come è stato scelto η_μ, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}\omega(\zeta_{j-1},\zeta_j) &= \sum_{j=1}^{\mu-1}\omega(\zeta_{j-1},\zeta_j)+\omega(\zeta_{\mu-1},\zeta_\mu)+\sum_{j=\mu+1}^{m}\omega(\zeta_{j-1},\zeta_j)\\ &= \sum_{j=1}^{\mu-1}\omega(\zeta_{j-1},\zeta_j)+\omega(\zeta_{\mu-1},\eta_\mu)\\ &\quad+\omega(\eta_\mu,\zeta_\mu)+\sum_{j=\mu+1}^{m}\omega(\zeta_{j-1},\zeta_j)\\ &= r_1-\varepsilon+\omega(\eta_\mu,\zeta_\mu)+\sum_{j=\mu+1}^{m}\omega(\zeta_{j-1},\zeta_j),\end{aligned}$$

da cui

$$\omega(\eta_\mu,\zeta_\mu)+\sum_{j=\mu+1}^{m}\omega(\zeta_{j-1},\zeta_j)=\sum_{j=1}^{m}\omega(\zeta_{j-1},\zeta_j)-(r_1-\varepsilon)<r_2-\varepsilon;$$

perciò $k_X(w,z)<r_2$. Di conseguenza, $z\in B_X\big(B_X(z_0,r_1),r_2\big)$ come voluto. □

Lemma 1.2.24. *Siano X una varietà Kobayashi-iperbolica, $z_0\in X$ e $r>0$. Supponiamo che esista un $\rho>0$ tale che la palla chiusa $\overline{B_X(z,\rho)}$ è compatta per ogni $z\in B_X(z_0,r)$; allora $\overline{B_X(z_0,r)}$ è compatta.*

Dimostrazione. Poiché X è una varietà, è localmente compatta; inoltre, essendo X Kobayashi-iperbolica, k_X è una distanza. Dunque esiste $0<s<r$ tale che $\overline{B_X(z_0,s)}$ è compatta. Ci basta allora mostrare che, se $\overline{B_X(z_0,s)}$ è compatta, anche $\overline{B_X(z_0,s+\rho/2)}$ lo è. Sia $\{z_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ una successione in $\overline{B_X(z_0,s+\rho/2)}$; per il Lemma 1.2.23, esiste una successione $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ in $\overline{B_X(z_0,s)}$ tale che $k_X(z_\nu,w_\nu)<3\rho/4$ per ogni $\nu\in\mathbb{N}$. A meno di sottosuccessioni, possiamo supporre $w_\nu\longrightarrow\tilde{w}\in\overline{B_X(z_0,s)}$. Allora $z_\nu\in\overline{B_X(\tilde{w},\rho)}$ per ν sufficientemente grande; dunque, per ipotesi $\{z_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente. □

Lemma 1.2.25. *Sia X una varietà Kobayashi-iperbolica. Allora X è k_X-completa se e solo se le palle chiuse sono compatte.*

Dimostrazione. Un'implicazione è ovvia. Assumiamo dunque che X sia k_X-completa; per il Lemma 1.2.24, ci basta mostrare che esiste $\rho>0$ tale che $\overline{B_X(z_0,\rho)}$ è compatta per ogni $z_0\in X$. Supponiamo per assurdo che non sia così; allora esiste $z_1\in X$ tale che $\overline{B_X(z_1,1/2)}$ non è compatta. Usando il Lemma 1.2.24, possiamo costruire induttivamente una successione $\{z_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ tale che $z_\nu\in B_X(z_{\nu-1},1/2^{\nu-1})$ e $\overline{B_X(z_\nu,1/2^\nu)}$ non è compatta. Tale successione è di Cauchy, per cui converge a $w_0\in X$ perché X è Kobayashi-iperbolica completa. Poiché X è una varietà, è localmente compatta; quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B_X(w_0, \varepsilon)}$ è compatta. Ma per ν sufficientemente grande $\overline{B_X(z_\nu, 1/2^\nu)} \subseteq \overline{B_X(w_0, \varepsilon)}$; dunque sarebbe compatta, contraddizione. $\square$

Proposizione 1.2.26. *Ogni varietà X Kobayashi-iperbolica completa è taut.*

Dimostrazione. Sia X una varietà Kobayashi-iperbolica completa, e consideriamo una successione $\{\varphi_\nu\} \subseteq \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ che non è compattamente divergente; vogliamo mostrare che ammette una sottosuccessione che converge in $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$.

A meno di passare a una sottosuccessione, possiamo trovare due compatti $H \subseteq \mathbb{D}$ e $K \subseteq X$ tali che $\varphi_\nu(H) \cap K \neq \varnothing$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$. Per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ scegliamo $\zeta_\nu \in H$ tale che $\varphi_\nu(\zeta_\nu) \in K$; fissato $z_0 \in K$ poniamo $r = \max\{k_X(z, z_0) \mid z \in K\}$. Allora per ogni $\zeta \in \mathbb{D}$ e $\nu \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$k_X\big(\varphi_\nu(\zeta), z_0\big) \leq k_X\big(\varphi_\nu(\zeta), \varphi_\nu(\zeta_\nu)\big) + k_X\big(\varphi_\nu(\zeta_\nu), z_0\big) \leq k_{\mathbb{D}}(\zeta, \zeta_\nu) + r.$$

Posto $R_\zeta = \max\{k_{\mathbb{D}}(\zeta, \zeta') \mid \zeta' \in H\}$, si ha dunque che la successione $\{\varphi_\nu(\zeta)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ è contenuta nella k_X-palla chiusa di centro z_0 e raggio $R_\zeta + r$, che è compatta per il Lemma 1.2.25; di conseguenza, la successione $\{\varphi_\nu(\zeta)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ è relativamente compatta in X. Inoltre, poiché X è Kobayashi-iperbolica, l'intera famiglia $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ è equicontinua (è 1-lipschitziana rispetto alla distanza di Kobayashi); dunque, per il teorema di Ascoli-Arzelà, la successione $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ è relativamente compatta in $C^0(\mathbb{D}, X)$. In particolare, ammette una sottosuccessione che converge in $C^0(\mathbb{D}, X)$; applicando il teorema di Weierstrass in carte opportune, si vede che il limite appartiene a $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$, da cui la tesi. $\square$

Esempio 1.2.27. In [Rosay] viene costruito un esempio di un dominio di $\mathbb{C}^3$ limitato (dunque Kobayashi-iperbolico) e taut, ma non Kobayashi-completo.

Diamo ora delle definizioni che ci serviranno per enunciare i risultati già noti nel caso dei domini regolari.

Definizione 1.2.28. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Un punto $\xi \in \partial\Omega$ è detto *essenziale* se esiste $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che per ogni intorno aperto connesso Ω_1 di ξ, e per ogni aperto connesso $\Omega_2 \subseteq \Omega \cap \Omega_1$ con $\Omega_2 \neq \varnothing, \Omega$, non esiste alcuna funzione $\tilde{u} \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ con $\tilde{u}|_{\Omega_2} = u|_{\Omega_2}$.

Diremo che Ω è un *dominio di olomorfia* se ogni $\xi \in \partial\Omega$ è essenziale.

I domini di olomorfia hanno una caratterizzazione equivalente, in generale più complicata, ma che può essere semplificata per i domini con bordo sufficientemente regolare.

Definizione 1.2.29. Una funzione continua $\mu : \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, +\infty)$ è detta *funzionale di Minkowski* se

(i) $\mu(Z) = 0$ se e solo se $Z = 0$;
(ii) $\mu(\zeta Z) = |\zeta|\mu(Z)$ per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ e $\zeta \in \mathbb{C}$.

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio, poniamo $\mu_\Omega(Z) = \inf_{w \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega} \mu(Z - w)$.

Definizione 1.2.30. Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $u : A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinua superiormente è detta *subarmonica* se per ogni $a \in A$, per ogni $r > 0$ tale che $\overline{D(a,r)} \subset A$ e per ogni h continua in $\overline{D(a,r)}$ e armonica in $D(a,r)$, si ha che se $h|_{\partial D(a,r)} \geq u|_{\partial D(a,r)}$ allora anche $h|_{D(a,r)} \geq u|_{D(a,r)}$.

Sia $A \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto. Una funzione $u : A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinua superiormente è detta *plurisubarmonica* se per ogni $a \in A$ e per ogni $Z \in \mathbb{C}^n$ l'applicazione $\zeta \longmapsto u(a + \zeta Z)$ è subarmonica dove definita.

Definizione 1.2.31. Un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ si dice *(Hartogs) pseudoconvesso* se esiste un funzionale di Minkowski μ tale che $-\log \mu_\Omega$ è plurisubarmonica in Ω.

Il seguente risultato, che ci dà l'equivalenza tra i domini di olomorfia e i domini pseudoconvessi, ci servirà per un controesempio.

Teorema 1.2.32. *([Kr, Theorem 5.1.3, equivalence between (1) and (3)]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio; allora Ω è pseudoconvesso se e solo se è un dominio di olomorfia.*

Nel caso di domini regolari, si può dare una definizione di pseudoconvessità più operativa equivalente.

Definizione 1.2.33. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio con bordo C^2, cioè tale che esista una funzione $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $\mathrm{d}\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$.

Dato $p \in \partial\Omega$, lo *spazio tangente complesso* a $\partial\Omega$ in p è

$$H_p\partial\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid \langle \bar{\partial}\rho(p), Z \rangle = 0\},$$

dove $\bar{\partial}\rho(p) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_1}(p), \ldots, \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_n}(p) \right)$.

Diciamo che Ω è *Levi pseudoconvesso in* $p \in \partial\Omega$ se la *forma di Levi*

$$L_\rho(p; Z) = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(p) Z_\nu \bar{Z}_\mu, \quad Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$$

è semidefinita positiva in $H_p\partial\Omega$. Diciamo che è *pseudoconvesso* se è Levi pseudoconvesso in p per ogni $p \in \partial\Omega$. Diciamo che è *strettamente pseudoconvesso in* $p \in \partial\Omega$ se la forma di Levi è definita positiva in $H_p\partial\Omega$. Diciamo che è *strettamente pseudoconvesso* se la forma di Levi è strettamente pseudoconvesso in p per ogni $p \in \partial\Omega$.

Vale il seguente risultato.

Teorema 1.2.34. *([Kr, Theorem 3.3.5]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato con bordo C^2. Allora Ω è Levi pseudoconvesso se e solo se è Hartogs pseudoconvesso.*

Usando la Proposizione 1.2.26, si può dimostrare che tutti i domini limitati e strettamente pseudoconvessi sono taut. Tuttavia, più avanti avremo bisogno di un risultato un po' più forte.

Proposizione 1.2.35. *([KR, Proposition 2]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato, pseudoconvesso e con bordo C^1. Allora Ω è taut.*

Prima di enunciare il risultato che, data una varietà taut, ci dà la dicotomia che cerchiamo per il comportamento delle iterate delle funzioni olomorfe, dobbiamo ancora mostrare qualche fatto tecnico preliminare. Partiamo con un paio di definizioni.

Definizione 1.2.36. Sia $f \in C^0(X, X)$. Diciamo che $g \in C^0(X, X)$ è una *funzione limite* di f se esiste una sottosuccessione delle iterate di f che converge a g in $C^0(X, X)$. Denotiamo con $\Gamma(f)$ l'insieme di tutte le funzioni limite di f.

Definizione 1.2.37. Una *retrazione olomorfa* di una varietà complessa X è una funzione $\rho \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che $\rho^2 = \rho$. L'immagine di una retrazione olomorfa è detta *retratto olomorfo*.

Ci servirà il seguente fatto sull'immagine di una retrazione olomorfa dovuto a Rossi; riportiamo la dimostrazione data da H. Cartan in [Ca].

Lemma 1.2.38. *([Rossi, Section 5]) Sia X una varietà complessa e consideriamo $\rho \in \mathrm{Hol}(X, X)$ una retrazione olomorfa di X. Allora l'immagine di ρ è una sottovarietà complessa chiusa di X.*

Dimostrazione. Sia $M = \rho(X)$. Per definizione di retrazione $\rho(X) = \mathrm{Fix}(\rho)$, da cui si ha che M è chiusa.

Consideriamo $z_0 \in M$. Prendiamo un intorno aperto U di z_0 in X che sia contenuto in una carta locale di X in z_0. Allora $V = \rho^{-1}(U) \cap U$ è un intorno aperto di z_0 tale che $\rho(V) \subseteq V$. Possiamo dunque supporre senza perdita di generalità che X sia un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$.

Sia $P = D\rho(z_0) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ e definiamo $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$ come

$$\varphi = \mathrm{id} + (2P - \mathrm{id}) \circ (\rho - P).$$

Poiché $D\varphi(z_0) = \mathrm{id}$, la funzione φ definisce una carta locale in un intorno di z_0. Adesso, dato che $\rho^2 = \rho$ e $P^2 = P$, si ha

$$\begin{aligned} \varphi \circ \rho &= \rho + (2P - \mathrm{id}) \circ \rho^2 - (2P - \mathrm{id}) \circ P \circ \rho \\ &= P \circ \rho = P + P \circ (2P - \mathrm{id}) \circ (\rho - P) = P \circ \varphi. \end{aligned}$$

Allora, letta in questa carta, ρ diventa lineare; perciò, M è una sottovarietà complessa vicino a z_0. Per arbitrarietà di z_0, segue che M è una varietà. □

Dobbiamo ora studiare alcune proprietà delle funzioni limite di funzioni olomorfe su varietà taut.

Teorema 1.2.39. *([A3]) Sia X una varietà taut e consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Se la successione $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ delle iterate di f non è compattamente divergente, allora esiste un'unica retrazione olomorfa $\rho \in \Gamma(f)$ su una sottovarietà complessa M di X tale che ogni funzione limite $h \in \Gamma(f)$ è della forma*

$$h = \gamma \circ \rho,$$

con $\gamma \in \mathrm{Aut}(M)$.

Inoltre, $\varphi = f|_M \in \mathrm{Aut}(M)$ *e* $\Gamma(f)$ *è isomorfo al sottogruppo di* $\mathrm{Aut}(M)$ *dato dalla chiusura di* $\{\varphi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Dimostrazione. Poiché la successione delle iterate di f non è compattamente divergente, esistono due compatti $H, K \subseteq X$ e una sottosuccessione di iterate tali che l'intersezione di K con l'immagine di H tramite le funzioni della sottosuccessione non è mai vuota. Dato che X è taut, possiamo estrarre una sotto-sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti o è compattamente divergente; per costruzione non può essere il secondo caso, per cui abbiamo trovato una sottosuccessione $\{f^{k_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ che converge uniformemente sui compatti a $h \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Possiamo anche assumere che $p_\nu = k_{\nu+1} - k_\nu$ e $q_\nu = p_\nu - k_\nu$ tendano a $+\infty$ per $\nu \longrightarrow +\infty$. A meno di prendere ulteriori sottosuccessioni, possiamo anche supporre che $\{f^{p_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ e $\{f^{q_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ convergano uniformemente sui compatti o siano compattamente divergenti (non necessariamente la stessa cosa per entrambe); è facile vedere che i ragionamenti che andremo a fare sono validi anche considerando eventuali sottosuccessioni, quindi non perdiamo di generalità. Allora

$$\lim_{\nu\longrightarrow+\infty} f^{p_\nu}\big(f^{k_\nu}(z)\big) = \lim_{\nu\longrightarrow+\infty} f^{k_{\nu+1}}(z) = h(z)$$

per ogni $z \in X$. Poiché l'orbita di z tramite $\{f^{k_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ tende a qualcosa, è relativamente compatta; dunque $\{f^{p_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ non può essere compattamente divergente. Allora converge, uniformemente sui compatti, a una $\rho \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che

$$h \circ \rho = \rho \circ h = h; \tag{10}$$

similmente, troviamo che $\{f^{q_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge, uniformemente sui compatti, a una $g \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che

$$g \circ h = h \circ g = \rho. \tag{11}$$

In particolare, $\rho^2 = \rho\circ\rho = g\circ h\circ\rho = g\circ h = \rho$, perciò ρ è una retrazione di X su una sottovarietà complessa M. Dalla (10) abbiamo $h(X) \subseteq M$; inoltre $g\circ\rho = \rho\circ g$, da cui $g(M) \subseteq M$. Allora la (11) ci dà $g \circ h|_M = h \circ g|_M = \mathrm{id}_M$. Dunque, ponendo $\gamma = h|_M$, otteniamo $h = \gamma \circ \rho$ con $\gamma \in \mathrm{Aut}(M)$. Dobbiamo mostrare che ρ non dipende da h; in particolare, non dipende dalla sottosuccessione scelta.

Sia $\{f^{k'_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ un'altra sottosuccessione convergente a $h' \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Ragionando come sopra, possiamo supporre che $s_\nu = k'_\nu - k_\nu$ e $t_\nu = k_{\nu+1} - k'_\nu$ convergano a $+\infty$ per $\nu \longrightarrow +\infty$ e che $\{f^{s_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ e $\{f^{t_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ convergano, uniformemente sui compatti, rispettivamente a $\alpha, \beta \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tali che

$$\alpha \circ h = h \circ \alpha = h' \qquad \text{e} \qquad \beta \circ h' = h' \circ \beta = h; \tag{12}$$

in particolare, $h(X) = h'(X)$, per cui M non dipende dalla sottosuccessione scelta. Adesso scriviamo $h = \gamma_1 \circ \rho_1, h' = \gamma_2 \circ \rho_2, \alpha = \gamma_3 \circ \rho_3$ e $\beta = \gamma_4 \circ \rho_4$, dove

$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ sono delle retrazioni olomorfe di X su M e $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \mathrm{Aut}(M)$. Vogliamo dire che $\rho_1 = \rho_2$. Notiamo che $h \circ h' = h' \circ h$ e $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$, che insieme alla (12) ci dà

$$\begin{aligned} \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \rho_2 &= \gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \rho_1, \\ \gamma_3 \circ \gamma_1 \circ \rho_1 = \gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \rho_3 &= \gamma_2 \circ \rho_2, \\ \gamma_4 \circ \gamma_2 \circ \rho_2 = \gamma_2 \circ \gamma_4 \circ \rho_4 &= \gamma_1 \circ \rho_1, \\ \gamma_3 \circ \gamma_4 \circ \rho_4 &= \gamma_4 \circ \gamma_3 \circ \rho_3. \end{aligned} \tag{13}$$

Usando la prima equazione in (13) scriviamo ρ_2 in funzione di ρ_1, e sostituendo nella seconda troviamo $\gamma_3 = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$. Similmente, usando la prima equazione scriviamo ρ_1 in funzione di ρ_2 e sostituendo nella terza troviamo $\gamma_4 = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$. Allora $\gamma_3 = \gamma_4^{-1}$ e la quarta equazione ci dà $\rho_3 = \rho_4$. Usando la seconda e la terza equazione abbiamo quindi

$$\rho_2 = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \rho_3 = \rho_3 = \rho_4 = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma_4 \circ \rho_4 = \rho_1,$$

come voluto.

Adesso, dal fatto che $f \circ \rho = \rho \circ f$ segue che $f(M) \subseteq M$. Ponendo $\varphi = f|_M$, se $f^{p_\nu} \longrightarrow \rho$ si ha che $f^{p_\nu+1} \longrightarrow \varphi \circ \rho$, quindi per quanto visto finora segue che $\varphi \in \mathrm{Aut}(M)$.

Infine, data $h = \gamma \circ \rho \in \Gamma(f)$, prendiamo due sottosuccessioni $\{f^{p_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ e $\{f^{k_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ convergenti rispettivamente a ρ e a h. Come prima, possiamo supporre che $p_\nu - k_\nu \longrightarrow +\infty$ e che $f^{p_\nu - k_\nu} \longrightarrow h_1 = \gamma_1 \circ \rho$ per $\nu \longrightarrow +\infty$. Allora $h \circ h_1 = h_1 \circ h = \rho$, da cui $\gamma_1 = \gamma^{-1}$. Dunque l'applicazione $h = \gamma \circ \rho \longmapsto \gamma$ è l'isomorfismo cercato fra $\Gamma(f)$ e la chiusura di $\{\varphi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathrm{Aut}(M)$, e così concludiamo. □

Definizione 1.2.40. Siano X una varietà taut e $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Sia M data dal Teorema 1.2.39; tale M è detta la *varietà limite* di f.

Vediamo finalmente la dicotomia cercata. Nello specifico, la vedremo nella forma di cinque asserzioni equivalenti.

Teorema 1.2.41. *([A4, Theorem 1.1]) Sia X una varietà taut e consideriamo $f \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- *(i) la successione $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ delle iterate di f non è compattamente divergente;*
- *(ii) la successione $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ delle iterate di f non contiene alcuna sottosuccessione compattamente divergente;*
- *(iii) la successione $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ delle iterate di f è relativamente compatta in $\mathrm{Hol}(X, X)$;*
- *(iv) l'orbita di z è relativamente compatta in X per ogni $z \in X$;*
- *(v) esiste $z_0 \in X$ la cui orbita è relativamente compatta in X.*

Dimostrazione. (v) $\Rightarrow$ (ii). Consideriamo $H = \{z_0\}$ e $K = \overline{\{f^k(z_0) \mid k \in \mathbb{N}\}}$; ovviamente H è compatto, e K lo è per l'ipotesi (v). Allora $f^k(H) \cap K \neq \varnothing$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, per cui $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ non può contenere sottosuccessioni compattamente divergenti.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Per il Corollario 1.2.6 $C^0(X, X^*)$ è metrizzabile; dunque anche il suo sottospazio $\mathrm{Hol}(X, X)$ è metrizzabile. Quindi, se per assurdo $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ non fosse relativamente compatta, ammetterebbe una sottosuccessione $\{f^{k_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ senza sottosottosuccessioni convergenti. Ma allora, dato che X è taut, conterrebbe una sottosottosuccessione compattamente divergente, ottenendo così una contraddizione all'ipotesi (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Fissiamo $z \in X$ e consideriamo la funzione $\mathrm{Hol}(X, X) \longrightarrow X$ data da $f \longmapsto f(z)$. Questa funzione è continua rispetto alla topologia su $\mathrm{Hol}(X, X)$, per cui l'immagine della chiusura di $\{f^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ è compatta perché immagine di un compatto, chiusa perché compatta in uno spazio di Hausdorff, e contiene $\{f^k(z) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Perciò l'orbita di z è contenuta in un compatto chiuso, e quindi è relativamente compatta, come voluto.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Ovvio.

(i) $\Rightarrow$ (v). Sia M la varietà limite di f e poniamo $\varphi = f|_M$. Sappiamo dal Teorema 1.2.39 che $\varphi \in \mathrm{Aut}(M)$ e che $\mathrm{id}_M \in \Gamma(\varphi)$. Prendiamo $z_0 \in M$; vogliamo mostrare che $C = \{\varphi^k(z_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è relativamente compatto in M, per cui anche in X dato che M è chiusa. Scegliamo $\varepsilon_0 > 0$ tale che $B_M(z_0, \varepsilon_0)$ è relativamente compatta in M; notiamo che $\varphi \in \mathrm{Aut}(M)$ implica che $B_M\big(\varphi^k(z_0), \varepsilon_0\big) = \varphi^k\big(B_M(z_0, \varepsilon_0)\big)$ è relativamente compatta in M per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dal Lemma 1.2.23 abbiamo che

$$\overline{B_M(z_0, \varepsilon_0)} \subseteq B_M\big(B_M(z_0, 7\varepsilon_0/8), \varepsilon_0/4\big);$$

per compattezza esistono quindi $w_1, \ldots, w_r \in B_M(z_0, 7\varepsilon_0/8)$ tali che

$$\overline{B_M(z_0, \varepsilon_0)} \cap C \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} B_M(w_j, \varepsilon_0/4) \cap C,$$

e possiamo assumere che $B_M(w_j, \varepsilon_0/4) \cap C \neq \varnothing$ per $j = 1, \ldots, r$. Per ogni $j = 1, \ldots, r$ scegliamo $k_j \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi^{k_j}(z_0) \in B_M(w_j, \varepsilon_0/4)$; allora

$$B_M(z_0, \varepsilon_0) \cap C \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} \Big(B_M\big(\varphi^{k_j}(z_0), \varepsilon_0/2\big) \cap C\Big). \tag{14}$$

Dato che $\mathrm{id}_M \in \Gamma(\varphi)$, l'insieme $I = \{k \in \mathbb{N} \mid k_M\big(\varphi^k(z_0), z_0\big) < \varepsilon_0/2\}$ è infinito; dunque possiamo trovare un $k_0 \in I$ tale che $k_0 \geq \max\{1, k_1, \ldots, k_r\}$. Poniamo $K = \bigcup_{k=0}^{k_0} \overline{B_M\big(\varphi^k(z_0), \varepsilon_0\big)}$; per costruzione, K è chiuso e compatto, per cui ci basta mostrare che $C \subseteq K$. Prendiamo $h \in I$; dato che l'insieme I è infinito, è sufficiente mostrare che $\varphi^k(z_0) \in K$ per ogni $0 \leq k \leq h$.

Supponiamo, per assurdo, che esista un minimo $h_0 \in I$ tale che l'insieme $\{\varphi^k(z_0) \mid 0 \leq k \leq h_0\}$ non sia contenuto in K. Ovviamente $h_0 > k_0$. Poiché $h_0, k_0 \in I$, abbiamo anche che $k_M\big(\varphi^{k_0}(z_0), \varphi^{h_0}(z_0)\big) < \varepsilon_0$. Dunque

$$k_M\big(\varphi^{k_0-j}(z_0), \varphi^{h_0-j}(z_0)\big) = k_M\big(\varphi^{k_0}(z_0), \varphi^{h_0}(z_0)\big) < \varepsilon_0$$

per ogni $0 \leq j \leq k_0$. In particolare,

$$\varphi^j(z_0) \in K \tag{15}$$

per ogni $j = h_0 - k_0, \dots, h_0$ e $\varphi^{h_0-k_0}(z_0) \in B_M(z_0, \varepsilon_0) \cap C$. Per la (14) possiamo trovare $1 \leq l \leq r$ tale che $k_M\big(\varphi^{k_l}(z_0), \varphi^{h_0-k_0}(z_0)\big) < \varepsilon_0/2$; quindi

$$k_M\big(\varphi^{k_l-j}(z_0), \varphi^{h_0-k_0-j}(z_0)\big) < \varepsilon_0/2 \tag{16}$$

per ogni $0 \leq j \leq \min\{k_l, h_0 - k_0\}$. Adesso, se $k_l \geq h_0 - k_0$ allora, per la (15), la (16) e la definizione di K, abbiamo $\varphi^j(z_0) \in K$ per ogni $0 \leq j \leq h_0$, in contraddizione con la scelta di h_0. Perciò dev'essere $k_l < h_0 - k_0$; poniamo $h_1 = h_0 - k_0 - k_l$. Per la (16) si ha $h_1 \in I$; dunque, essendo $h_1 < h_0$, dev'essere $\varphi^j(z_0) \in K$ per ogni $0 \leq j \leq h_1$. Ma la (15), la (16) e la definizione di K implicano che $\varphi^j(z_0) \in K$ per ogni $h_1 \leq j \leq h_0$, per cui anche in questo caso troviamo una contraddizione. □

Il seguente esempio mostra come l'ipotesi che X sia taut è necessaria per ottenere la dicotomia, anche in un caso piuttosto regolare. In realtà, dalla Proposizione 1.2.13 sappiamo che l'essere Kobayashi-iperbolica implica una proprietà di compattezza per le funzioni olomorfe da X in sé. Per definizione, l'essere taut impone che le funzioni limite in $\mathrm{Hol}(X, X)$ siano ancora in $\mathrm{Hol}(X, X)$ oppure siano la costante ∞; ciò ci dà appunto la dicotomia (orbite relativamente compatte oppure iterate comapttamente divergenti) che esclude i casi misti nel Teorema 1.2.41.

Esempio 1.2.42. Consideriamo $\Omega = \mathbb{B}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la palla unitaria in $\mathbb{C}^2$ privata dell'origine. Essendo un dominio limitato è Kobayashi-iperbolico, ma non è taut in quanto non è pseudoconvesso (per il Teorema 1.2.4, non è un dominio di olomorfia), e i domini taut diversi da $\mathbb{C}^n$ sono sempre pseudoconvessi (si veda [Wu, Theorem F]).

Prendiamo come $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega)$ la funzione $f(z, w) = (z/2, e^{i\theta} w)$. L'orbita di un qualunque punto del tipo $(0, w)$ con $w \neq 0$ è relativamente compatta, mentre l'orbita di un qualunque punto del tipo $(z, 0)$ con $z \neq 0$ tende al punto del bordo $(0, 0)$. Dunque orbite relativamente compatte coesistono con orbite che tendono al bordo, per cui $\{f^h\}_{h \in \mathbb{N}}$ non è né compattamente divergente né ha tutte le orbite relativamente compatte.

In particolare, le funzioni limite di f non sono né costanti né in $\mathrm{Hol}(\Omega, \Omega)$, e questo è un controesempio, senza l'ipotesi taut, per il teorema di tipo "Wolff-Denjoy" che vedremo nella sezione 2.

Per finire, vediamo un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" per domini strettamente pseudoconvessi (quindi con bordo C^2); in particolare, faremo riferimento a una dimostrazione che sfrutta fatti geometrici quali la Gromov-iperbolicità.

Definizione 1.2.43. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dati $x, y, w \in X$ il *prodotto di Gromov* tra x e y con punto base w è

$$(x, y)_w = \frac{1}{2}\big(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)\big).$$

Dato $\delta \geq 0$, diciamo che X è δ-*iperbolico* se

$$(x, y)_w \geq \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta \text{ per ogni } x, y, z, w \in X.$$

Se (X, d) è δ-iperbolico per qualche $\delta \geq 0$, diremo che è *Gromov-iperbolico*.

Definizione 1.2.44. Sia (X, d) uno spazio metrico Gromov-iperbolico. Una successione (x_i) *converge a infinito* se $\lim\limits_{i,j\to+\infty}(x_i, x_j)_w = +\infty$.

Definizione 1.2.45. Sia (X, d) uno spazio metrico Gromov-iperbolico. Fissato $w \in X$, il *bordo iperbolico* $\partial^G X$ è dato dalle classi di equivalenza delle successioni convergenti a infinito quozientate tramite la seguente relazione di equivalenza: due successioni $(x_i), (y_i)$ sono equivalenti se $\lim\limits_{i\to+\infty}(x_i, y_i)_w = +\infty$. Questa costruzione è indipendente dalla scelta di w.

Inoltre, è possibile estendere il prodotto di Gromov a tutto $X \cup \partial^G X$ in modo che valga ancora la disuguaglianza per la Gromov-iperbolicità, eventualmente cambiando δ. Il bordo iperbolico possiede anche una *classe canonica di distanze* correlate al prodotto di Gromov, che inducono tutte la stessa topologia.

Osservazione 1.2.46. Se X è proprio, cioè ogni suo sottoinsieme chiuso e limitato è compatto, e geodetico, cioè ogni coppia di punti è collegata da una geodetica, è possibile mettere una topologia su $X \cup \partial^G X$ che lo rende uno spazio compatto, e tale che ristretta a $\partial^G X$ coincida con la topologia indotta dalla classe canonica di distanze. Si veda [BH, Part III, Chapter H, Paragraph 3] per i dettagli. Più avanti (Osservazione 2.1.3) vedremo che i domini limitati e strettamente pseudoconvessi rientrano in questo caso.

Osservazione 1.2.47. Nei casi che ci interessano, proprio è equivalente a completo (Lemma 1.2.25); come avremo modo di notare nella dimostrazione del Teorema 2.4.1, sotto queste ipotesi si può concludere subito. Tuttavia, vedremo tra poco un esempio di dominio taut ma non completo.

Il Teorema, che già era noto ancora prima che venisse mostrata la Gromov-iperbolicità, è il seguente.

Teorema 1.2.48. *(Abate, [A4, Theorem 0.5]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso, e sia $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega)$. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *le orbite dei punti di Ω tramite f sono relativamente compatte in Ω; oppure,*
- *esiste un unico punto di $\partial\Omega$ tale che le iterate di f convergono tutte, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Per dimostrarlo usando la Gromov-iperbolicità, è prima necessario mostrare che (Ω, k_Ω) è Gromov-iperbolico. Citiamo l'articolo di Balogh e Bonk in cui si trova la dimostrazione.

Teorema 1.2.49. *(Balogh, Bonk, [BB, Theorem 1.4]) Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *con* $n \geq 2$ *un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso; allora* (Ω, k_Ω) *è Gromov-iperbolico. Inoltre, il bordo iperbolico* $\partial^G \Omega$ *può essere identificato con il bordo euclideo* $\partial\Omega$*, cioè sono identificati come spazi topologici.*

Serve anche un Teorema dovuto a Karlsson.

Teorema 1.2.50. *(Karlsson, [Ka, Corollary 3.7]) Sia* (X, d) *uno spazio metrico proprio tale che:*

(i) è un aperto denso di uno spazio topologico $\overline{X}$ *compatto e di Hausdorff la cui topologia di sottospazio coincide con la topologia di spazio metrico. Inoltre, dati* $x \in X$ *e* x_n *una successione in* X *che converge a un punto di* $\overline{X} \setminus X$*, si ha* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} d(x, x_n) = +\infty$*;*

(ii) date x_n *e* y_n *due successioni convergenti a due punti distinti di* $\overline{X} \setminus X$ *e* $z \in X$*, si ha* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} d(x_n, y_n) - \max\{d(x_n, z), d(y_n, z)\} = +\infty$*.*

Sia $\phi : X \longrightarrow X$ *una funzione tale che* $d\big(\phi(x), \phi(y)\big) \leq d(x, y)$ *per ogni* $x, y \in X$*. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *le orbite dei punti di* X *tramite* ϕ *sono limitate;*
- *esiste un unico punto di* $\overline{X} \setminus X$ *a cui convergono tutte le orbite di* ϕ*.*

L'ipotesi (ii) del Teoerema 1.2.50 è sempre verificata dagli spazi Gromov-iperbolici, mentre segue dal Teorema 1.2.49 che la (i) è vera per i domini limitati e strettamente pseudoconvessi; per [G, Paragraph 3.3], sono anche propri. Usando anche il teorema di Montel, si ottiene così il Teorema 1.2.48.

Esempio 1.2.51. In [Rosay] viene costruito un esempio di dominio taut e limitato ma non completo, per cui non è proprio. Non è dunque possibile, in casi simili, usare i risultati appena visti e la Gromov-iperbolicità.

Come già anticipato nell'introduzione, quello che noi andremo a vedere è un risultato che vale anche per domini con bordo non necessariamente regolare. L'ipotesi di tipo geometrico che andremo ad utilizzare è il concetto di visibilità, di cui discuteremo anche il rapporto con la Gromov-iperbolicità.

2 Un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per varietà taut con visibilità

2.1 Il concetto di visibilità

Nella sezione 1 abbiamo visto come l’ipotesi di varietà taut ci permette di dire che se le orbite di una certa funzione non sono relativamente compatte allora la successione delle iterate è compattamente divergente.

Per ottenere un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” nel caso in cui le iterate siano compattamente divergenti dobbiamo dire due cose: che le iterate convergono uniformemente sui compatti a una funzione a valori nel bordo euclideo, e che in realtà tale funzione è una costante.

La convergenza al bordo uniforme sui compatti è data dai risultati che dimostreremo nella sottosezione 2.3. Oltre all’ipotesi di avere una sottovarietà Kobayashi-iperbolica e relativamente compatta di una varietà complessa astratta, per ottenere i suddetti risultati utilizzeremo delle ipotesi aggiuntive di tipo geometrico, che serviranno anche per dire che la funzione limite è costante: la condizione di visibilità per le simil-geodetiche.

Nel seguito, ricordiamo che data una varietà complessa X abbiamo fissato una metrica hermitiana $\|\cdot\|_X$, che nel caso in cui X sia connessa induce una distanza d_X. Se abbiamo delle sottovarietà, fissiamo la metrica sulla varietà ambiente e prendiamo la restrizione sulle sottovarietà, e se la varietà ambiente è $\mathbb{C}^n$ prendiamo la metrica euclidea. Ricordiamo inoltre che, se $X \subseteq Y$ è un sottospazio topologico, abbiamo posto $\partial_Y X = \overline{X} \setminus X$.

Definizione 2.1.1. Sia X una varietà complessa e connessa; fissiamo due costanti $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo; una curva $\sigma : I \longrightarrow X$ è detta una (λ, κ)-*simil-geodetica* se:

1. per ogni $s, t \in I$ si ha
$$\frac{1}{\lambda}|t-s| - \kappa \leq k_X\big(\sigma(s), \sigma(t)\big) \leq \lambda|t-s| + \kappa; \tag{17}$$
2. σ è assolutamente continua rispetto a d_X (quindi $\sigma'(t)$ esiste per quasi ogni $t \in I$) e per quasi ogni $t \in I$ si ha
$$K_X\big(\sigma(t); \sigma'(t)\big) \leq \lambda. \tag{18}$$

Definizione 2.1.2. Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Diciamo che X è (λ, κ)-*visibile* se:

1. ogni due punti distinti di X possono essere collegati da una (λ, κ)-simil-geodetica;
2. per ogni coppia di punti $p, q \in \partial_Y X$ con $p \neq q$, esistono in $\overline{X}$ due intorni V e W, di p e q rispettivamente, con chiusura disgiunta, e un compatto K di X tali che ogni (λ, κ)-simil-geodetica in X che collega un punto di V a un punto di W interseca K.

Osservazione 2.1.3. Nel caso di un dominio limitato con bordo di classe C^2, l'ipotesi di essere strettamente pseudoconvesso permetteva di concludere la condizione geometrica di Gromov-iperbolicità. Inoltre, in tal caso il dominio è proprio e completo (si veda [G, Paragraph 3.3]); dunque, ricordando l'Osservazione 1.1.18, per il teorema di Hopf-Rinow ([BH, Part I, Proposition 3.7]) è uno spazio geodetico. Si può dimostrare che gli spazi Gromov-iperbolici, propri e geodetici sono visibili sia per le geodetiche sia per le simil-geodetiche: per le prime si può ragionare come in [BNT, Proposition 2.5], usando il fatto che per ogni coppia di punti distinti di $\partial^G X$ esistono due loro intorni disgiunti in $X \cup \partial^G X$ (si veda [BH, Part III, Chapter H, Lemma 3.6]); per le seconde, segue da [BH, Part III, Chapter H, Theorem 1.7].

Le simil-geodetiche sono delle curve che, a meno di costanti moltiplicative e additive, si comportano come le geodetiche, cioè come le curve che minimizzano la lunghezza. Quello che chiediamo, euristicamente, nella Definizione 2.1.2 è che, se vogliamo andare da un punto a un altro del bordo con tali curve, allora non possiamo stare arbitrariamente vicini al bordo, ma siamo costretti a "piegarci" verso l'interno; in pratica, stiamo chiedendo che ci sia una sorta di curvatura negativa.

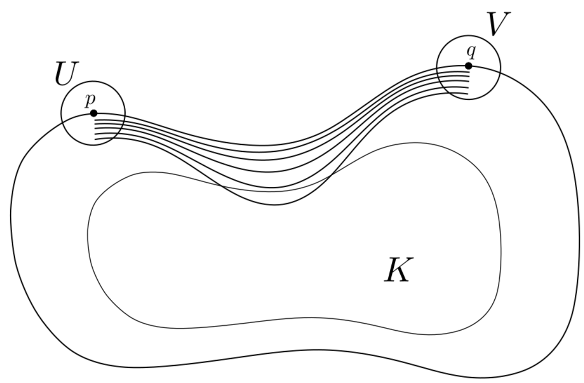

Figura 1: il caso, da noi escluso, in cui le simil-geodetiche da U a V fuggono dai compatti di X

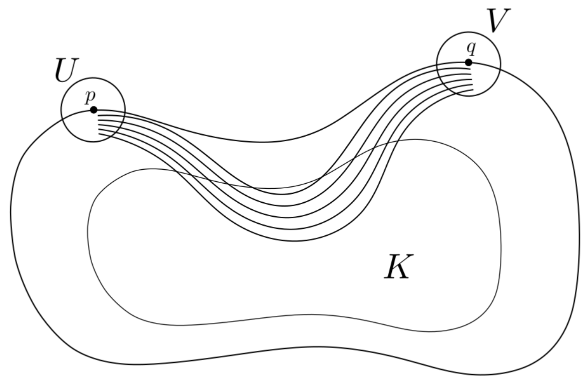

Figura 2: sotto ipotesi di visibilità, le simil-geodetiche da U a V devono curvare verso l'interno per intersecare un compatto K

Esempio 2.1.4. Il dominio Ω definito nell'Esempio 1.2.42 è (λ, κ)-visible per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$. Per vederlo, fissiamo λ e κ e consideriamo due casi:

(i) uno dei due punti è l'origine. Allora basta prendere come compatto un qualsiasi insieme della forma $\{r \leq |z| \leq R\}$ con $0 < r < R < 1$ e i due intorni aperti sufficientemente piccoli;

(ii) i due punti sono entrambi sulla sfera unitaria. Per [NTT, Proposition 6] è facile vedere che, se la palla unitaria è (λ, κ)-visibile, allora Ω soddisfa la condizione voluta anche in questo caso. Ma la palla unitaria è limitata, ed è facile vedere che è strettamente pseudoconvessa; quindi, per l'Osservazione 2.1.3, è (λ, κ)-visibile, come voluto.

Perciò, l'ipotesi che la varietà sia taut è necessaria per ottenere un teorema di tipo "Wolff-Denjoy", anche con la condizione di visibilità.

2.2 Risultati tecnici preparatori

Prima di andare a vedere il teorema di tipo "Wolff-Denjoy", dobbiamo mostrare diversi risultati preliminari. Visto che andremo a dimostrare la versione del teorema che si trova in [CMS], tali risultati sono per la maggior parte dimostrati, e il resto citati, nel suddetto articolo.

Cominciamo con delle stime dal basso e dall'alto per la metrica di Kobayashi, che permettono anche di ottenere la lipschitzianità delle simil-geodetiche.

Lemma 2.2.1. *Sia X una varietà complessa. Se un sottoinsieme compatto $K \subseteq X$ è contenuto nel polidisco di una carta di X, allora esiste una costante $C = C(K) > 0$ tale che $K_X(z; Z) \leq C\|Z\|_X$ per ogni $z \in K$ e $Z \in T_z X$.*

Dimostrazione. Siano $n = \dim X$ e $D = \mathbb{D}_{r_1} \times \cdots \times \mathbb{D}_{r_n}$ il polidisco che contiene K. Applicando la Proposizione 1.1.11 all'inclusione e passando in coordinate, per ogni $z \in K$ e $Z \in T_z X$ si ha che

$$K_X(z; Z) \leq K_D(z; Z) \leq \max_{j=1,\dots,n} \frac{r_j |Z_j|}{r_j^2 - |z_j|^2},$$

dove $|\cdot|$ è il modulo, cioè la norma euclidea delle coordinate della carta, e l'ultima disuguaglianza è il punto (iii) della Proposizione 1.2.7. Poiché, per compattezza di K, la quantità $r_j^2 - |z_j|^2$ è limitata dal basso da una costante positiva per $j = 1, \dots, n$, esiste una costante $C_0 > 0$ tale che

$$K_X(z; Z) \leq C_0 \max_{j=1,\dots,n} \{|Z_j|\}.$$

Consideriamo la norma hermitiana come una funzione continua

$$\| \cdot \|_X : K \times \left\{ v \in \mathbb{C}^n \mid \max_{j=1,\dots,n} \{|v_j|\} = 1 \right\} \longrightarrow (0, +\infty),$$

dove il secondo fattore nel dominio della funzione è visto come sottoinsieme del tangente al variare dei punti nel primo fattore. Per compattezza, tale funzione ammette un minimo $c > 0$; a meno di riscalare abbiamo che

$$\|Z\|_X \geq c \max_{j=1,\dots,n} \{|Z_j|\}$$

per ogni $z \in K$ e $Z \in T_z X$. Basta allora prendere $C = C_0/c$. □

Proposizione 2.2.2. *Sia X una varietà complessa. Allora:*

(1) se X è connessa, è Kobayashi-iperbolica se e solo se per ogni compatto $K \subseteq X$ esiste una costante $c = c(K) > 0$ tale che $c\|Z\|_X \leq K_X(z; Z)$ per ogni $z \in K$ e $Z \in T_z X$;

(2) per ogni compatto $K \subseteq X$ esiste una costante $C = C(K) > 0$ tale che $K_X(z; Z) \leq C\|Z\|_X$ per ogni $z \in X$ e $Z \in T_z X$;

(3) se X è una sottovarietà limitata di $\mathbb{C}^n$ esiste una costante $c > 0$ tale che $c\|Z\| \leq K_X(z; Z)$ per ogni $z \in X$ e $Z \in T_z X$.

Dimostrazione. (1) Mostriamo che se vale quella condizione allora X è Kobayashi-iperbolica. Prendiamo due punti distinti $z_0, w_0 \in X$, per cui esiste un intorno compatto K di z_0 con $w_0 \notin K$; in particolare, ogni curva da z_0 a w_0 deve uscire da K. Quindi per il Teorema 1.2.10 si ha

$$k_X(z_0, w_0) \geq c \cdot d_X\big(z_0, \partial_X K\big) > 0,$$

da cui k_X è una distanza e X è Kobayashi-iperbolica.

Viceversa, supponiamo che X sia Kobayashi-iperbolica. Prendiamo un punto $z_0 \in X$ e fissiamo un intorno U di X contenuto in una carta centrata in z_0 e che sia biolomorfo a $\mathbb{B}^d$, dove $d = \dim X$. Consideriamo l'aperto $V \subseteq U$ corrispondente a $\mathbb{B}^d_{1/2}$ tramite il biolomorfismo, che è ancora un intorno di z_0. Scegliamo inoltre $\varepsilon > 0$ tale che $B_X(z_0, 2\varepsilon) \subset\subset V$ (ricordiamo che con B_X si intendono le palle rispetto a k_X). In particolare, per la Definizione 1.1.2, il punto (i) della Proposizione 1.2.7 e la Proposizione 1.1.15, per ogni $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ tale che $\varphi(0) \in B_X(z_0, \varepsilon)$ si ha $\varphi(\mathbb{D}_{\tanh\varepsilon}) \subseteq B_X(z_0, 2\varepsilon)$.

Dati $z \in B_X(z_0, \varepsilon)$ e $Z \in T_zX$, siano $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ e $v \in \mathbb{C}$ tali che $\varphi(0) = z$ e $\mathrm{d}_0\varphi(v) = Z$. Allora, ponendo $\psi(\zeta) = \varphi\big((\tanh\varepsilon)\zeta\big)$, abbiamo che $\psi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, V)$, $\psi(0) = z$ e $\mathrm{d}_0\psi(v) = (\tanh\varepsilon)Z$. Dalla definizione della pseudometrica di Kobayashi segue che

$$(\tanh\varepsilon)K_V(z; Z) \leq k_X(z; Z)$$

per ogni $z \in B_X(z_0, \varepsilon)$ e $Z \in T_zX$. Dal punto (3), che dimostreremo indipendentemente tra poco, segue che la condizione voluta è vera in $\mathbb{B}^d_{1/2}$, e dunque in V, senza che la costante dipenda da un compatto, ma rispetto alla metrica euclidea. Tuttavia, considerano il compatto $\overline{\mathbb{B}^d_{1/2}}$ (motivo per cui abbiamo dovuto prendere la palla più piccola) e chiamando E_j i vettori delle base canonica di T_wX identificato, al variare di $w \in \overline{\mathbb{B}^d_{1/2}}$, con $\mathbb{C}^d$, si ha

$$\begin{aligned}\|Z\|_X \leq \sum_{j=1}^d |a_j| \cdot \|E_j\|_X &\leq \max_{\substack{w \in \overline{\mathbb{B}^d_{1/2}},\\ j=1,\dots,d}} \|E_j\|_X \sum_{j=1}^d |a_j| \\ &\leq C_1 \sqrt{\sum_{j=1}^d |a_j|^2} = C_1\|Z\|\end{aligned}$$

per ogni $w \in \overline{\mathbb{B}^d_{1/2}}$ e $Z \in T_wX$ della forma $Z = \displaystyle\sum_{j=1}^d a_jE_j$, e per una qualche costante $C_1 > 0$, per cui la condizione vale anche con la metrica $\|\cdot\|_X$. Dato allora un compatto K, basta ricoprirlo con un numero finito di intorni della forma $B_X(z_0, \varepsilon)$ e prendere la costante più piccola al variare di tali intorni.

(2) Per ogni $z \in K$, scegliamo un polidisco U_z centrato in z e contenuno in una carta di X; sia $U'_z \subseteq U_z$ un altro polidisco, nella stessa carta, centrato in z e relativamente compatto in U_z per ogni $z \in K$. Dato che K è compatto, esistono $z_1, \dots, z_l$ tali che $K \subseteq \displaystyle\bigcup_{j=1}^l U'_{z_j}$. Allora, poiché $\overline{U}'_{z_j}$ è un sottoinsieme compatto di U_{z_j} per $j = 1, \dots, l$, per il Lemma 2.2.1 abbiamo

$$K_X(z, Z) \leq C_j\|Z\|_X$$

per ogni $z \in U'_{z_j}$ e $Z \in T_zX$, dove $C_j > 0$ è una costante che dipende dal compatto $\overline{U}'_{z_j}$. Basta allora porre $C(K) = \max_{j=1,\dots,l}\{C_j\}$.

(3) Supponiamo per assurdo che esistano $z_j \in X$ e $Z_j \in T_{z_j}X$, con $Z_j \neq 0$, tali che $\lim_{j \longrightarrow +\infty} K_X(z_j; Z_j)/\|Z_j\| \longrightarrow 0$. Senza perdita di generalità possiamo supporre $\|Z_j\| = 1$ per ogni j. Per definizione di K_X, esistono delle funzioni

$f_j \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, X)$ e dei $v_j \in \mathbb{C}$ tali che $f_j(0) = z_j$ e

$$|v_j| \leq K_X(z_j; Z_j) + 1/j \quad \text{ e } \quad \mathrm{d}_0 f_j(v_j) = Z_j.$$

Segue che $\lim_{j \longrightarrow +\infty} \| \mathrm{d}_0 f_j(1) \| = \lim_{j \longrightarrow +\infty} 1/|v_j| = +\infty$. A meno di sottosuccessioni e di riordinare le coordinate, possiamo supporre che siano le prime componenti dei vettori $\mathrm{d}_0 f_j(1)$ a tendere a $+\infty$. Chiamiamo g_j la prima componente di f_j, cosicché g_j' è la prima componente di $\mathrm{d}f_j(1)$. Le g_j sono le composizioni delle f_j con un embedding e una proiezione, dunque sono olomorfe; inoltre, poiché X è limitata, sono equilimitate. Esiste quindi un $r > 0$ tale che $g_j \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}_r)$ per ogni j. Adesso, noi sappiamo che $\lim_{j \longrightarrow +\infty} |g_j'(0)| = +\infty$; basta allora applicare il lemma di Schwarz a $\dfrac{g_j - g_j(0)}{2r}$ con j sufficientemente grande per ottenere una contraddizione. □

Osservazione 2.2.3. Per il punto (3) della Proposizione precedente non è necessario che la metrica sia quella euclidea, basta una metrica hermitiana qualsiasi. Per vederlo, basta usare il punto (1) e la Proposizione 1.1.11.

Corollario 2.2.4. *Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà Kobayashi-iperbolica Y. Allora esiste $c > 0$ tale che $c \cdot d_Y(z, w) \leq k_X(z, w)$ per ogni $z, w \in X$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 1.2.10 ci basta mostrare che $c \cdot d_Y(z, w) \leq l_X(\gamma)$ per ogni curva C^1 a tratti $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ tale che $\gamma(a) = z$ e $\gamma(b) = w$. Prendendo $c = c(\overline{X}) > 0$ dato dal punto (1) della Proposizione 2.2.2 e usando la Proposizione 1.1.11, abbiamo che

$$\begin{aligned} l_X(\gamma) &= \int_a^b K_X\big(\gamma(t); \gamma'(t)\big)\, \mathrm{d}t \geq \int_a^b K_Y\big(\gamma(t); \gamma'(t)\big)\, \mathrm{d}t \\ &\geq \int_a^b c \|\gamma'(t)\|_Y \, \mathrm{d}t c \cdot d_Y(z, w), \end{aligned}$$

come voluto. □

Proposizione 2.2.5. *Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà Kobayashi-iperbolica Y. Allora si ha che per ogni $\lambda \geq 1$ esiste una costante $C = C(\lambda) > 0$ tale che ogni (λ, κ)-simil-geodetica è C-lipschitziana rispetto a d_Y.*

Dimostrazione. Ogni (λ, κ)-simil-geodetica $\sigma : I \longrightarrow X$ è, per definizione, assolutamente continua rispetto a d_X. Allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, per ogni $s, t \in I$ abbiamo che

$$\sigma(t) = \sigma(s) + \int_s^t \sigma'(r)\, \mathrm{d}r.$$

Per il punto (1) della Proposizione 2.2.2, esiste una costante $c = c(\overline{X}) > 0$ tale che $c\|Z\|_Y \leq K_Y(z; Z)$ per ogni $z \in X$ e $Z \in T_zX$, e per definizione di (λ, κ)-simil-geodetica $K_X\big(\sigma(t); \sigma'(t)\big) \leq \lambda$ per quasi ogni $t \in I$. Dunque, usando anche la Proposizione 1.1.11, si ha che $\|\sigma'(t)\|_Y \leq \lambda/c$ per quasi ogni $t \in I$, da cui

$$d_Y\big(\sigma(t), \sigma(s)\big) \leq \int_s^t \|\sigma'(r)\|_Y \,\mathrm{d}r \leq \frac{\lambda}{c}|t - s|,$$

cioè σ è λ/c-lipschitziana rispetto a d_Y. □

Il seguente Lemma è un fatto tecnico che ci servirà tra poco.

Lemma 2.2.6. *Siano X una varietà complessa e connessa e $\sigma : [a, b] \longrightarrow X$ una curva assolutamente continua rispetto a d_X. Se*

$$l_X(\sigma) \leq k_X\big(\sigma(a), \sigma(b)\big) + \kappa,$$

allora, per ogni $a \leq s \leq t \leq b$, si ha

$$l_X(\sigma|_{[s,t]}) \leq k_X\big(\sigma(s), \sigma(t)\big) + \kappa.$$

Dimostrazione. Siano s e t come sopra. Allora

$$l_X(\sigma|_{[s,t]}) = l_X(\sigma) - l_X(\sigma|_{[a,s]}) - l_X(\sigma|_{[t,b]}).$$

Usando la nostra ipotesi e il punto (ii) del Teorema 1.2.10, troviamo

$$l_X(\sigma|_{[s,t]}) \leq k_X\big(\sigma(a), \sigma(b)\big) + \kappa - k_X\big(\sigma(a), \sigma(s)\big) - k_X\big(\sigma(t), \sigma(b)\big);$$

applicando la disuguaglianza triangolare, si ottiene la tesi. □

Adesso vogliamo mostrare che le varietà Kobayashi-iperboliche sono connesse per archi simil-geodetici.

Teorema 2.2.7. *Sia X una varietà Kobayashi-iperbolica. Per ogni $z, w \in X$ e ogni $\kappa > 0$ esiste una $(1, \kappa)$-simil-geodetica $\sigma : [a, b] \longrightarrow X$ tale che $\sigma(a) = z$ e $\sigma(b) = w$.*

Dimostrazione. Per il punto (i) del Teorema 1.2.10, a meno di riparametrizzare esiste una curva C^1 a tratti $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ tale che $\gamma(0) = z, \gamma(1) = w$ e

$$l_X(\gamma) < k_X(z, w) + \kappa;$$

inoltre, a meno di perturbare di poco la curva, possiamo assumere che sia C^1 e che $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [0, 1]$. Consideriamo la funzione $f : [0, 1] \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$f(t) = \int_0^t K_X\big(\gamma(r); \gamma'(r)\big) \,\mathrm{d}r.$$

Poiché $\gamma([0,1])$ è compatto in X, per i punti (1) e (2) della Proposizione 2.2.2 esiste $C > 0$ tale che

$$\frac{1}{C}\|\gamma'(t)\|_X \leq K_X\big(\gamma(t);\gamma'(t)\big) \leq C\|\gamma'(t)\|_X \text{ per ogni } t \in [0,1].$$

Dato che $\|\gamma'(t)\|_X > 0$ per ogni $t \in [0,1]$ e γ' è continua, esistono $A, B > 0$ tali che $A \leq \|\gamma'(t)\|_X \leq B$ per ogni $t \in [0,1]$. Quindi f è una funzione bilipschitziana. Sia dunque $g : [0, l_X(\gamma)] \longrightarrow [0,1]$ l'inversa di f. Vogliamo dire che la curva $\sigma = \gamma \circ g : [0, l_X(\gamma)] \longrightarrow X$ è una $(1,\kappa)$-simil-geodetica; sostanzialmente, σ è la riparametrizzazione per lunghezza d'arco di γ.

Poiché g è bilipschitziana (perché lo è la sua inversa) e γ è C^1, abbiamo che σ è lipschitziana, per cui anche assolutamente continua, rispetto a d_X; allora, per i t per i quali $g'(t)$ esiste, si ha $\sigma'(t) = \gamma'\big(g(t)\big)g'(t)$. Inoltre, per tali t anche $f'\big(g(t)\big)$ esiste ed è non-nullo, e $g'(t) = 1/f'\big(g(t)\big) > 0$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha che f' esiste per quasi ogni $s \in [0,1]$ e $f'(s) = K_X\big(\gamma(s);\gamma'(s)\big)$. Siccome g è bilipschitziana, la preimmagine degli $s \in [0,1]$ per cui $f'(s)$ esiste è un sottoinsieme di $[0, l_X(\gamma)]$ di misura piena. Visto che $\gamma'(s) \neq 0$ per ogni $s \in [0,1]$, otteniamo che

$$g'(t) = \frac{1}{K_X\Big(\gamma\big(g(t)\big);\gamma'\big(g(t)\big)\Big)}$$

per quasi ogni $t \in [0, l_X(\gamma)]$. Per tali t si ha che

$$K_X\big(\sigma(t);\sigma'(t)\big) = K_X\Big(\gamma\big(g(t)\big);\gamma'\big(g(t)\big)g'(t)\Big) = 1;$$

quindi $l_X(\sigma) = l_X(\gamma) \leq k_X(z,w) + \kappa$. Per il Lemma 2.2.6 si ha, per ogni $0 \leq s \leq t \leq l_X(\gamma)$, che

$$|t-s| = l_X(\sigma|_{[s,t]}) \leq k_X\big(\sigma(s),\sigma(t)\big) + \kappa.$$

Dato che σ è assolutamente continua, per il punto (ii) del Teorema 1.2.10 abbiamo anche che

$$k_X\big(\sigma(s),\sigma(t)\big) \leq l_X(\sigma|_{[s,t]}) = |s-t|$$

per ogni $0 \leq s \leq t \leq l_X(\gamma)$. Segue dunque che σ è una $(1,\kappa)$-simil-geodetica. $\square$

Adesso ci servirà un lemma quasi ovvio.

Lemma 2.2.8. *Sia X una varietà complessa e connessa. Se $\sigma : [a,b] \longrightarrow X$ è una $(1,\kappa)$-simil-geodetica per qualche $\kappa > 0$, allora per ogni $t \in [a,b]$ si ha*

$$k_X\big(\sigma(a),\sigma(t)\big) + k_X\big(\sigma(t),\sigma(b)\big) \leq k_X\big(\sigma(a),\sigma(b)\big) + 3\kappa.$$

Dimostrazione. È un'immediata conseguenza della definizione di $(1,\kappa)$-simil-geodetica. $\square$

Il seguente lemma, invece, ci servirà per la prossima dimostrazione. È un risultato sulla convergenza puntuale, mentre più avanti ne vedremo uno sulla convergenza uniforme sui compatti per varietà $(1, \kappa_0)$-visibili per qualche $\kappa_0 > 0$.

Lemma 2.2.9. *Siano X uno spazio topologico primo numerabile e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una successione con chiusura compatta avente un unico punto di accumulazione ξ. Allora $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n = \xi$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che non valga la tesi. Allora esistono un intorno U di ξ e una sottosuccessione $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tali che $x_{n_j} \notin U$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Poiché $\overline{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ è compatta in X che è primo numerabile, è compatta per successioni. Dunque, a meno di ulteriori sottosuccessioni, possiamo supporre che $\lim\limits_{j\longrightarrow+\infty} x_{n_j} = \xi'$, ma poiché la successione ha un unico punto di accumulazione dev'essere $\xi' = \xi$, contraddizione in quanto $x_{n_j} \notin U$ intorno di ξ per ogni $j \in \mathbb{N}$. □

2.3 Convergenza uniforme sui compatti a meno di sottosuccessioni

In questa sezione dimostreremo alcuni risultati di convergenza di successioni di funzioni olomorfe. Cominciamo con un lemma sulla convergenza puntuale.

Lemma 2.3.1. *Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.*

Siano Z una varietà Kobayashi-iperbolica e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(Z, X)$ una successione compattamente divergente. Allora esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tali che $f_{n_j}(z) \longrightarrow \xi$ per ogni $z \in Z$.

Dimostrazione. Sia $z_0 \in Z$. Per relativa compattezza, a meno di sottosuccessioni possiamo supporre che esista $\xi_0 \in \partial_Y X$ tale che $f_n(z_0) \longrightarrow \xi_0$. Supponiamo per assurdo che esista $z_1 \in Z$ tale che la successione $\{f_n(z_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a ξ_0. Considerando una curva continua che collega z_0 a z_1, si trova facilmente che possiamo eventualmente sostituirli con due punti tali che $k_Z(z_0, z_1) < \kappa_0/2$. Di nuovo a meno di sottosuccessioni, possiamo supporre che esista $\xi_1 \in \partial_Y X$ tale che $\xi_1 \neq \xi_0$ e $f_n(z_1) \longrightarrow \xi_1$.

Per il Teorema 2.2.7 esiste una $(1, \kappa_0/2)$-simil-geodetica $\sigma : [0, T] \longrightarrow Z$ tale che $\sigma(0) = z_0$ e $\sigma(T) = z_1$. Poniamo $\sigma_n := f_n \circ \sigma$, vogliamo dimostrare che σ_n è una $(1, \kappa_0)$-simil-geodetica per ogni n. Per la Proposizione 1.1.15 e per la definizione di $(1, \kappa_0/2)$-simil-geodetica, abbiamo che

$$k_X\big(\sigma_n(s), \sigma_n(t)\big) \leq k_Z\big(\sigma(s), \sigma(t)\big) \leq |t - s| + \kappa_0/2 \leq |t - s| + \kappa_0$$

per ogni $s, t \in [0, T]$. Inoltre, sempre dalla definizione di di $(1, \kappa_0/2)$-simil-geodetica si ha che

$$\begin{aligned} |t-s| - \kappa_0 &\leq |0-T| - \kappa_0/2 - \kappa_0/2 \leq k_Z\big(\sigma(0), \sigma(T)\big) - \kappa_0/2 \\ &= k_Z(z_0, z_1) - \kappa_0/2 < 0 \leq k_X\big(\sigma_n(s), \sigma_n(t)\big) \end{aligned}$$

per ogni $s, t \in [0, T]$. Infine, dalla Proposizione 1.1.11 e dalla definizione di $(1, \kappa_0/2)$-simil-geodetica segue che

$$K_X\big(\sigma_n(t); \sigma_n'(t)\big) \leq K_Z\big(\sigma(t); \sigma'(t)\big) \leq 1$$

per ogni $t \in [0, T]$. Dunque σ_n è una $(1, \kappa_0)$-simil-geodetica per ogni n, come volevamo.

Adesso, poiché $\sigma_n(0) = f_n(z_0) \longrightarrow \xi_0$ e $\sigma_n(T) = f_n(z_1) \longrightarrow \xi_1$ e X è $(1, \kappa_0)$-visibile, esiste un compatto $K \subseteq X$ tale che

$$\varnothing \neq K \cap \sigma_n([0, T]) = K \cap f_n\big(\sigma([0, T])\big)$$

per ogni n, in contraddizione con l'ipotesi che la successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia compattamente divergente. $\square$

Quello che andremo a dimostrare adesso è uno dei fatti cruciali per ottenere il teorema di tipo "Wolff-Denjoy". Esso afferma che, sotto condizioni di visibilità per le simil-geodetiche, le sottosuccessioni di iterate di una funzione olomorfa che "tendono a infinito" convergono tutte, puntualmente, a un unico punto del bordo.

Proposizione 2.3.2. *Sia X una sottovarietà complessa, connessa e relativamente compatta di una varietà Kobayashi-iperbolica Y. Supponiamo che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Data una funzione $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$, esiste $\xi \in \partial_Y X$ tale che per ogni funzione $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente per cui esiste $y_0 \in X$ tale che*

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^{\mu(j)}(y_0), y_0\big) = +\infty \tag{19}$$

si ha

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} F^{\mu(j)}(z) = \xi \tag{20}$$

per ogni $z \in X$.

Dimostrazione. Se $\limsup\limits_{n \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^n(x), x\big) < +\infty$ per ogni $x \in X$ l'affermazione è vera a vuoto per ogni $\xi \in \partial_Y X$. Altrimenti, scelto $x_0 \in X$ tale che $\limsup\limits_{n \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^n(x_0), x_0\big) = +\infty$ possiamo costruire una funzione strettamente crescente $\nu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che:

- si ha $k_X\big(F^{\nu(j)}(x_0), x_0\big) \geq k_X\big(F^k(x_0), x_0\big)$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \leq \nu(j)$;

- si ha $\lim_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu(j)}(x_0),x_0\big)=+\infty$;
- la successione $\{F^{\nu(j)}(x_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a un certo $\xi\in\partial_Y X$.

Infatti, definendo induttivamente $l_0=0$ e l_n come il minimo numero naturale $h>l_{n-1}$ tale che $k_X\big(F^h(x_0),x_0\big)\geq\max\big\{n,k_X\big(F^{l_{n-1}}(x_0),x_0\big)\big\}$, abbiamo $k_X\big(F^{l_n}(x_0),x_0\big)\geq k_X\big(F^k(x_0),x_0\big)$ per ogni n e per ogni $k\leq l_n$; inoltre, abbiamo $\lim_{n\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{l_n}(x_0),x_0\big)=+\infty$. Per relativa compattezza di X, esiste un'ulteriore sottosuccessione l_{n_j} tale che $F^{l_{n_j}}(x_0)$ converge a un certo $\xi\in\overline{X}$, e in realtà $\xi\in\partial_Y X$ visto che la distanza di Kobayashi da x_0 tende a $+\infty$; basta allora porre $\nu(j)=l_{n_j}$.

Vogliamo ora mostrare la seguente asserzione.

Siano $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{m'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ due successioni strettamente crescenti di numeri naturali e $z_0,z'_0\in X$ tali che:

(1) per ogni $j\in\mathbb{N}$ si ha $m_j\geq m'_j$;
(2) per ogni $j\in\mathbb{N}$ e $k\leq m_j$ si ha $k_X\big(F^{m_j}(z_0),z_0\big)\geq k_X\big(F^k(z_0),z_0\big)$;
(3) si ha $\lim_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{m_j}(z_0),z_0\big)=\lim_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{m'_j}(z'_0),z_0\big)=+\infty$;
(4) le successioni $\{F^{m_j}(z_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{F^{m'_j}(z'_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergono, rispettivamente, a ζ e ζ' in $\partial_Y X$;

allora $\zeta=\zeta'$.

Supponiamo per assurdo che $\zeta\neq\zeta'$. Per il Corollario 1.2.8 anche X è Kobayashi-iperbolica; quindi grazie al Teorema 2.2.7 possiamo scegliere, per ogni $j\in\mathbb{N}$, una $(1,\kappa_0)$-simil-geodetica $\sigma_j:[0,T_j]\longrightarrow X$ tale che $\sigma_j(0)=F^{m_j}(z_0)$ e $\sigma_j(T_j)=F^{m'_j}(z'_0)$. Adesso, dato che abbiamo assunto che $\{F^{m_j}(z_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{F^{m'_j}(z'_0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergano a due punti di $\partial_Y X$ distinti e X ha la visibilità rispetto alle $(1,\kappa_0)$-simil-geodetiche, esistono una costante $0<R<+\infty$ e, per ogni $j\in\mathbb{N}$, un $t_j\in[0,T_j]$ tali che $k_X\big(z_0,\sigma_j(t_j)\big)<R$. Per il Lemma 2.2.8 si ha dunque che

$$\begin{aligned} k_X\big(F^{m_j}(z_0),F^{m'_j}(z'_0)\big)&\geq k_X\big(F^{m_j}(z_0),\sigma_j(t_j)\big)+k_X\big(\sigma_j(t_j),F^{m'_j}(z'_0)\big)-3\kappa_0\\ &\geq k_X\big(F^{m_j}(z_0),z_0\big)-k_X\big(z_0,\sigma_j(t_j)\big)\\ &\quad+k_X\big(F^{m'_j}(z'_0),z_0\big)-k_X\big(z_0,\sigma_j(t_j)\big)-3\kappa_0\\ &\geq k_X\big(F^{m_j}(z_0),z_0\big)+k_X\big(F^{m'_j}(z'_0),z_0\big)-3\kappa_0-2R; \end{aligned} \tag{21}$$

d'altra parte, abbiamo anche che

$$\begin{aligned} k_X\big(F^{m_j}(z_0),F^{m'_j}(z'_0)\big)&\leq k_X\big(F^{m_j-m'_j}(z_0),z'_0\big)\\ &\leq k_X\big(F^{m_j-m'_j}(z_0),z_0\big)+k_X(z_0,z'_0)\\ &\leq k_X\big(F^{m_j}(z_0),z_0\big)+k_X(z_0,z'_0), \end{aligned} \tag{22}$$

dove per la prima e la terza disuguaglianza abbiamo usato, rispettivamente, le condizioni (1) e (2) sulle successioni $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{m'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$; nella prima, abbiamo anche usato che le funzioni olomorfe sono semicontrazioni rispetto a k_X.

Concatenando la (21) e la (22) e riarrangiando i termini, otteniamo

$$k_X\big(F^{m'_j}(z'_0), z_0\big) \leq k_X(z_0, z'_0) + 3\kappa_0 + 2R,$$

che è in contraddizione con la condizione (3).

Adesso che l'asserzione è stata dimostrata, possiamo concludere la dimostrazione. Usando la disuguaglianza triangolare e il fatto che le funzioni olomorfe sono semicontrazioni rispetto a k_X, troviamo che

$$k_X\big(F^{\mu(j)}(z), z'\big) \geq k_X\big(F^{\mu(j)}(y_0), y_0\big) - k_X(y_0, z) - k_X(z', y_0);$$

segue che $\lim\limits_{j \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^{\mu(j)}(z), z'\big) = +\infty$ per ogni $z, z' \in X$.

Fissiamo ora uno $z \in X$, e prendiamo ξ' punto limite di $\{F^{\mu(j)}(z)\}_{j\in\mathbb{N}}$. Allora deve esistere una funzione strettamente crescente $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che $\lim\limits_{j\longrightarrow+\infty} F^{(\mu\circ\tau)(j)}(z) = \xi'$; inoltre, poiché $\lim\limits_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\mu(j)}(z), z\big) = +\infty$, dev'essere $\xi' \in \partial_Y X$. Scegliamo una funzione strettamente crescente $\tau' : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che $\nu \circ \tau' \geq \mu \circ \tau$ e applichiamo l'asserzione dimostrata sopra alle successioni $m_j = (\nu \circ \tau')(j), m'_j = (\mu \circ \tau)(j)$ e ai punti $z_0 = x_0, z'_0 = z$, per i quali si verificano facilmente le condizioni (1), (2), (3) e (4). Troviamo così $\xi' = \xi$ e si conclude grazie al Lemma 2.2.9. $\square$

Anche la prossima proposizione ci aiuterà nella nostra dimostrazione. Essa afferma che, sotto condizioni di visibilità per le simil-geodetiche, vale una sorta di lemma "sotto-sotto", cioè da ogni sottosuccessione si può estrarre una sotto-sottosuccessione convergente (a una costante). Prima ci serviranno un paio di lemmi.

Lemma 2.3.3. *Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Siano $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di punti di X tali che $x_n \longrightarrow \xi$ e $y_n \longrightarrow \xi'$, con $\xi, \xi' \in \partial_Y X$ e $\xi \neq \xi'$.*

Allora non può essere che $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} k_X(x_n, y_n) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa, e prendiamo due successioni che la contraddicono. Per il Teorema 2.2.7 possiamo prendere, per ogni $n \in \mathbb{N}$, una $(1, 1/n)$-simil-geodetica $\sigma_n : [0, T_n] \longrightarrow X$ tale che $\sigma_n(0) = x_n$ e $\sigma_n(T_n) = y_n$. Per n sufficientemente grande sono tutte $(1, \kappa_0)$-simil-geodetiche, per cui esistono un compatto $K \subseteq X$ e $t_n \in [0, T_n]$ tali che $\sigma_n(t_n) \in K$ per ogni n. Dato che X è una varietà, possiamo prendere un compatto $H \subseteq X$ tale che $K \subseteq \mathring{H}$. Allora $\partial^{\mathrm{top}} H$ e K sono due compatti disgiunti, dove ∂^{top} è il bordo topologico in X (chiusura meno parte interna); dunque $\inf\limits_{\substack{x\in\partial^{\mathrm{top}}H,\\ y\in K}} k_X(x, y) = \varepsilon > 0$.

Poiché $\sigma_n(0)$ e $\sigma_n(T_n)$ convergono a punti del bordo, per n sufficientemente grande appartengono a $X \setminus H$. Ma $\sigma_n(t_n) \in K \subseteq \mathring{H}$; quindi deve esistere t'_n

tale che $\sigma_n(t'_n) \in \partial^{\text{top}} H$. Segue che

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon \leq k_X\big(\sigma_n(t_n), \sigma_n(t'_n)\big) &\leq |t_n - t'_n| + 1/n \leq |0 - T_n| + 1/n \\ &\leq k_X\big(\sigma_n(0), \sigma_n(T_n)\big) + 2/n = k_X(x_n, y_n) + 2/n \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

contraddizione. □

Lemma 2.3.4. *Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica di una varietà complessa Y. Supponiamo che X sia relativamente compatta e che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.*

Supponiamo che esistano un compatto $K \subseteq X$, una funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ e $\xi \in \partial_Y X$ tali che la successione $F^{\mu(j)}$ converge alla costante ξ uniformemente su K. Allora la successione $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente su tutti i compatti di X.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la tesi non sia vera; esistono dunque un compatto $H \subseteq X$ e un intorno U di ξ in $\overline{X}$ tali che $F^{\mu(j)}(H) \not\subseteq U$ frequentemente. Allora esistono una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ e una successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ tali che $F^{\mu(j_n)}(z_n) \notin U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

A meno di sottosuccessioni, usando il Lemma 2.3.1 e la relativa compattezza di X, possiamo supporre che $z_n \longrightarrow \tilde{z} \in H$, che $F^{\mu(j_n)}(z) \longrightarrow \tilde{\xi} \in \overline{X}$ per ogni $z \in X$ e che $F^{\mu(j_n)}(z_n) \longrightarrow \xi' \in \overline{X}$. Dato che $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è compattamente divergente, dev'essere $\xi' \in \partial_Y X$. Siccome $F^{\mu(j_n)}(z) \longrightarrow \xi$ per ogni $z \in K$, dev'essere $\tilde{\xi} = \xi$. Visto che $F^{\mu(j_n)}(z_n) \notin U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dev'essere $\xi \neq \xi'$.

Adesso notiamo che per la Proposizione 1.1.15 si ha

$$k_X\big(F^{\mu(j_n)}(z_n), F^{\mu(j_n)}(\tilde{z})\big) \leq k_X(z_n, \tilde{z}) \longrightarrow 0$$

per $n \longrightarrow +\infty$. Basta allora applicare il Lemma 2.3.3 con $x_n = F^{\mu(j_n)}(z_n)$ e $y_n = F^{\mu(j_n)}(\tilde{z})$ per ottenere una contraddizione. □

Proposizione 2.3.5. *Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica di una varietà complessa Y. Supponiamo che X sia relativamente compatta e che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.*

Per ogni funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tale che la successione $\{F^{\mu(j_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente su tutti i compatti di X.

Dimostrazione. Fissiamo $z_0 \in X$. Per la relativa compattezza di X e la divergenza dai compatti di $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, esistono $\xi \in \partial_Y X$ e una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tali che $F^{\mu(j_n)}(z_0) \longrightarrow \xi$. Allora la successione $\{F^{\mu(j_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ uniformemente sul compatto $\{z_0\}$. Si conclude applicando il Lemma 2.3.4. □

2.4 Il teorema di tipo “Wolff-Denjoy”

Andiamo adesso ad enunciare e dimostrare una versione generale di un teorema di tipo “Wolff-Denjoy” per varietà Kobayashi-iperboliche. La dimostrazione riportata ricalca quella data in [CMS], che a sua volta riprende la strategia e le tecniche impiegate da [BZ1] e [BM]. Ognuno di questi articoli ha generalizzato il risultato ottenuto nel precedente.

Teorema 2.4.1. *Sia X una sottovarietà complessa e relativamente compatta di una varietà Kobayashi-iperbolica Y. Supponiamo che X sia taut e che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.*

Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *le orbite dei punti di X tramite F sono relativamente compatte in X; oppure,*
- *esiste un unico punto di $\partial_Y X$ tale che la successione delle iterate di F converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Dimostrazione. Poiché X è taut, per il Teorema 1.2.41 o l'orbita di z tramite F è relativamente compatta per ogni $z \in X$, oppure la successione delle iterate $\{F^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ è compattamente divergente. Supponiamo che le orbite di F non siano relativamente compatte in X; allora la successione delle iterate di F è compattamente divergente.

Consideriamo una sottosuccessione di $\{F^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ che converge uniformemente sui compatti a una funzione olomorfa $\tilde{F} : X \to Y$ con $\tilde{F}(X) \subseteq \overline{X}$. Poiché le iterate di F sono compattamente divergenti, si deve avere che $\tilde{F}(X) \subseteq \partial_Y X$. Allora, usando la Proposizione 2.3.5, troviamo che $\tilde{F}$ è costante. Identifichiamo quindi

$$\Gamma := \overline{\{F^\nu\}}_{\nu\in\mathbb{N}} \setminus \{F^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$$

come un insieme di punti di $\partial_Y X$, dove la chiusura è intesa rispetto alla topologia compatta-aperta. Supponiamo, per assurdo, che Γ contenga almeno due punti.

Caso 1: esiste (e quindi per ogni) $o \in X$ tale che

$$\limsup_{\nu\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^\nu(o), o\big) = +\infty.$$

Possiamo dunque scegliere, in modo simile a quanto fatto all'inizio della dimostrazione della Proposizione 2.3.2 e applicando la Proposizione 2.3.5, una sottosuccessione $\{\nu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tale che:

(1) per ogni $j \in \mathbb{N}$ e $k \leq \nu_j$ si ha $k_X\big(F^k(o), o\big) \leq k_X\big(F^{\nu_j}(o), o\big)$;
(2) si ha $\lim_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu_j}(o), o\big) = +\infty$;
(3) si ha che $\{F^{\nu_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge, uniformemente sui compatti di X, a $\xi \in \partial_Y X$.

Adesso, poiché abbiamo assunto che Γ contenga almeno due elementi, esiste una sottosuccessione $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tale che $\{F^{\mu_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge, uniformemente sui compatti di X, a $\eta \in \partial_Y X$ con $\eta \neq \xi$. Segue immediatamente dalla Proposizione 2.3.2 che non possiamo avere $\limsup\limits_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\mu_j}(o), o\big) = +\infty$. Perciò dev'essere $\limsup\limits_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\mu_j}(o), o\big) < +\infty$; notiamo che se X fosse Kobayashi-iperbolica completa, allora per il Lemma 1.2.25 avremmo subito un assurdo. Altrimenti, si ha

$$\begin{aligned}\limsup_{h\longrightarrow+\infty}\limsup_{j\longrightarrow+\infty} & k_X\big(F^{\nu_h}(o), F^{\mu_j}(o)\big) \\ &\geq \limsup_{h\longrightarrow+\infty}\limsup_{j\longrightarrow+\infty}\Big(k_X\big(F^{\nu_h}(o), o\big) - k_X\big(F^{\mu_j}(o), o\big)\Big) = +\infty.\end{aligned} \tag{23}$$

Consideriamo ora un $l \in \mathbb{N}$. Poiché la successione $\{F^{\mu_j - l}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sul compatto $\{F^l(o)\}$ a η, per il Lemma 2.3.4 converge, uniformemente su tutti i compatti di X, a η.

Poniamo

$$M_l := \limsup_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\mu_j - l}(o), o\big);$$

affermiamo che

$$\limsup_{l\longrightarrow+\infty} M_l < +\infty.$$

Supponiamo per assurdo che non sia così; allora esiste una sottosuccessione $\{l_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tale che $M_{l_m} > m$ per ogni m. Per definizione di M_l e per quanto appena trovato sulla successione $\{F^{\mu_j - l}\}_{j\in\mathbb{N}}$, abbiamo quindi che esiste una sottosottosuccessione $\{j_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tale che:

(1) $d_Y\big(F^{\mu_{j_m} - l_m}(o), \eta\big) < 1/m$;
(2) $k_X\big(F^{\mu_{j_m} - l_m}(o), o\big) > m$.

Per la Proposizione 2.3.2 deve dunque essere $\eta = \xi$, contraddizione. Perciò segue che $\limsup\limits_{l\longrightarrow+\infty} M_l < +\infty$. Allora

$$\begin{aligned}\limsup_{h\longrightarrow+\infty}\limsup_{j\longrightarrow+\infty} & k_X\big(F^{\nu_h}(o), F^{\mu_j}(o)\big) \\ &\leq \limsup_{h\longrightarrow+\infty}\limsup_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(o, F^{\mu_j - \nu_h}(o)\big) = \limsup_{h\longrightarrow+\infty} M_{\nu_h} < +\infty,\end{aligned}$$

in contraddizione con la (23); questo conclude il Caso 1.

Caso 2: esiste (e quindi per ogni) $o \in X$ tale che

$$\limsup_{\nu\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu}(o), o\big) < +\infty.$$

Ricordiamo che abbiamo assunto che esistano due punti distinti $\xi, \eta \in \Gamma$. Poiché X è $(1, \kappa_0)$-visibile, esistono V_ξ, V_η intorni in $\overline{X}$ rispettivamente di ξ e di η, con $\overline{V}_\xi \cap \overline{V}_\eta = \varnothing$, e un compatto K di X tali che ogni $(1, \kappa_0)$-simil-geodetica in X che collega un punto di V_ξ a un punto di V_η interseca K. Adesso definiamo, per $\delta > 0$ arbitrario, la funzione $G_\delta : K \times K \longrightarrow [0, +\infty)$ data da

$$G_\delta(x_1, x_2) := \inf \left\{ k_X\big(F^m(x_1), x_2\big) \mid m \in \mathbb{N}, d_Y\big(F^m(x_1), \xi\big) < \delta \right\}.$$

Notiamo che G_δ è ben definita per ogni $\delta > 0$ (basta considerare la sottosuccessione delle iterate di F che converge a ξ uniformemente sui compatti di X) e che $G_{\delta_1}(x_1, x_2) \geq G_{\delta_2}(x_1, x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in K$ e $\delta_1 \leq \delta_2$. Vogliamo dire che, in questo caso, si ha

$$\sup_{\delta > 0, x_1, x_2 \in K} G_\delta(x_1, x_2) < +\infty.$$

Supponiamo per assurdo che non sia così; allora esistono una successione di reali positivi $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e due successioni $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{x''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in K tali che $G_{\delta_n}(x'_n, x''_n) \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Possiamo inoltre supporre che le successioni $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{x''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergano, rispettivamente, a $\delta_0 \geq 0$ e $x', x'' \in K$. Sia $\{\nu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sottosuccessione di $\mathbb{N}$ tale che $\{F^{\nu_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge, uniformemente sui compatti di X, a ξ. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $j(n) \in \mathbb{N}$ tale che si ha $\sup_{x \in K} d_Y\big(F^{\nu_j}(x), \xi\big) < \delta_n$ per ogni $j \geq j(n)$. In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $d_Y\big(F^{\nu_{j(n)}}(x'_n), \xi\big) < \delta_n$. Segue che

$$n \leq G_{\delta_n}(x'_n, x''_n) \leq k_X\big(F^{\nu_{j(n)}}(x'_n), x''_n\big);$$

da ciò discende facilmente che $\lim_{n \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^{\nu_{j(n)}}(x'), x'\big) = +\infty$, in contraddizione con l'ipotesi del Caso 2.

Abbiamo dunque che, per ogni $x_1, x_2 \in K$, è ben definita la funzione data da

$$G(x_1, x_2) := \lim_{\delta \longrightarrow 0^+} G_\delta(x_1, x_2);$$

definiamo inoltre

$$\varepsilon := \liminf_{z \longrightarrow \eta} \inf_{y \in K} k_X(z, y).$$

Per il Corollario 2.2.4 abbiamo che $k_X(z, y) \geq c \cdot d_Y(z, y)$, e quest'ultima quantità è sempre maggiore di una costante positiva per z sufficientemente vicino al bordo e di conseguenza lontano dal compatto K; quindi $\varepsilon > 0$. Scegliamo ora due punti $q_1, q_2 \in K$ tali che

$$G(q_1, q_2) < \inf_{x_1, x_2 \in K} G(x_1, x_2) + \varepsilon.$$

Inoltre, dalla definizione di G_δ abbiamo che, per ogni $j \in \mathbb{N}$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $d_Y\big(F^m(q_1), \xi\big) < 1/j$ e $G_{1/j}(q_1, q_2) \leq k_X\big(F^m(q_1), q_2\big) \leq G_{1/j}(q_1, q_2) + 1/j$. Possiamo dunque trovare una funzione strettamente crescente $\nu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha

$$d_Y\big(F^{\nu(j)}(q_1), \xi\big) < 1/\nu(j)$$

e

$$G_{1/\nu(j)}(q_1,q_2) \le k_X\big(F^{\nu(j)}(q_1),q_2\big) \le G_{1/\nu(j)}(q_1,q_2)+1/\nu(j);$$

poiché $\{F^{\nu(j)}(q_1)\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a ξ, per il Lemma 2.3.4 la successione $\{F^{\nu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge, uniformemente sui compatti di X, a ξ. Da come è stata scelta ν, abbiamo anche che $\lim_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu(j)}(q_1),q_2\big) = G(q_1,q_2)$.

Fissiamo adesso una funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che la successione $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge, uniformemente sui compatti di X, a η. Dato un compatto $K \subseteq X$, anche $F^{\mu(j)}(K)$ è compatto, in quanto immagine continua di un compatto; allora, poiché la successione $\{F^{\nu(h)}\}_{h\in\mathbb{N}}$ converge a ξ uniformemente sui compatti di X, per ogni $j \in \mathbb{N}$ fissato troviamo che la successione $\{F^{\nu(h)+\mu(j)}\}_{h\in\mathbb{N}}$ converge a ξ uniformemente sui compatti di X. Ciò implica, considerando un'esaustione di X in compatti, che esiste una funzione strettamente crescente $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che la successione $\{F^{(\nu\circ\tau)(j)+\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a ξ uniformemente sui compatti di X. Ricordando le proprietà di ν, e a meno di rinominare le funzioni, possiamo dunque dire di avere due funzioni strettamente crescenti $\nu, \mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tali che:

(1) le successioni $\{F^{\nu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergono, uniformemente sui compatti di X, a ξ e η rispettivamente;
(2) la successione $\{F^{\nu(j)+\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a ξ uniformemente sui compatti di X;
(3) si ha $\lim_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu(j)}(q_1),q_2\big) = G(q_1,q_2)$.

Per il Teorema 2.2.7, abbiamo che per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste una $(1,1/j)$-simil-geodetica $\sigma_j : [0,T_j] \longrightarrow X$ con $\sigma_j(0) = F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1)$ e $\sigma_j(T_j) = F^{\mu(j)}(q_2)$. Dato che $\{F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1)\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{F^{\mu(j)}(q_2)\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergono, rispettivamente, a ξ e η, per j abbastanza grande si ha che $\sigma_j(0) \in V_\xi$ e $\sigma_j(T_j) \in V_\eta$, e σ_j è una $(1,\kappa_0)$-simil-geodetica. Dunque $\sigma_j([0,T_j]) \cap K \neq \varnothing$ per j abbastanza grande. Per ogni tale j scegliamo un $t_j \in [0,T_j]$ tale che $x_j^* = \sigma_j(t_j) \in K$. Per compattezza di K, a meno di passare a una sottosuccessione possiamo supporre che $x_j^* \longrightarrow x^* \in K$ per $j \longrightarrow +\infty$. Poiché per ogni $j \in \mathbb{N}$ la curva σ_j è una $(1,1/j)$-simil-geodetica, per il Lemma 2.2.8 troviamo che

$$k_X\big(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1),F^{\mu(j)}(q_2)\big) \ge k_X\big(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1),x_j^*\big)+k_X\big(x_j^*,F^{\mu(j)}(q_2)\big)-3/j. \tag{24}$$

Adesso, si ha che

$$\begin{aligned}\liminf_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1),x_j^*\big) &\ge \liminf_{j\longrightarrow+\infty}\Big(k_X\big(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1),x^*\big)-k_X(x^*,x_j^*)\Big)\\ &= \liminf_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1),x^*\big) \ge G(q_1,x^*);\end{aligned} \tag{25}$$

inoltre, per definizione di ε abbiamo che

$$\liminf_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(x_j^*,F^{\mu(j)}(q_2)\big) \ge \varepsilon. \tag{26}$$

Mettendo assieme la (24), la (25) e la (26), troviamo che

$$\liminf_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1),F^{\mu(j)}(q_2)\big) \ge G(q_1,x^*)+\varepsilon;$$

d'altra parte, abbiamo che

$$\limsup_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu(j)+\mu(j)}(q_1), F^{\mu(j)}(q_2)\big) \leq \limsup_{j\longrightarrow+\infty} k_X\big(F^{\nu(j)}(q_1), q_2\big) = G(q_1, q_2).$$

Dunque si ha che $G(q_1, q_2) \geq G(q_1, x^*) + \varepsilon$, in contraddizione con la scelta di q_1 e q_2.

Poiché sia il Caso 1 che il Caso 2 portano a una contraddizione, ne consegue che la supposizione che Γ contenga almeno due punti dev'essere sbagliata, da cui segue facilmente la tesi. □

Vogliamo ora ottenere come conseguenza il teorema di tipo "Wolff-Denjoy" dimostrato in [CMS].

Corollario 2.4.2. *([CMS, Theorem 1.15]) Sia X una sottovarietà complessa, connessa e limitata di $\mathbb{C}^n$. Supponiamo che X sia taut e che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-visibile.*

Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *le orbite dei punti di X tramite F sono relativamente compatte in X; oppure,*
- *esiste un unico punto di ∂X tale che la successione delle iterate di F converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Dimostrazione. Poiché X è limitata, esiste $R > 0$ tale che X è una sottovarietà complessa e relativamente compatta della varietà Kobayashi-iperbolica $\mathbb{B}^n_R$, per cui anche X è Kobayashi-iperbolica. Essendo anche taut e $(1, \kappa_0)$-visibile, soddisfa le ipotesi del Teorema 2.4.1, da cui la tesi. □

Adesso la dimostrazione del Teorema 1.2.48 è immediata.

Corollario 2.4.3. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato e strettamente pseudoconvesso, e sia $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega)$. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *le orbite dei punti di Ω tramite f sono relativamente compatte in Ω; oppure,*
- *esiste un unico punto di $\partial\Omega$ tale che la successione delle iterate di f converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Dimostrazione. Abbiamo già notato, nell'Osservazione 2.1.3, che i domini limitati e strettamente pseudoconvessi di $\mathbb{C}^n$ sono visibili per le simil-geodetiche. Abbiamo anche visto che sono completi rispetto alla distanza di Kobayashi, dunque per la Proposizione 1.2.26 sono taut. Si conclude applicando il Corollario 2.4.2. □

Sotto ipotesi di natura topologica si può ottenere qualcosa di più.

Definizione 2.4.4. Una varietà complessa X si dice di *tipo topologico finito* se i gruppi di omologia singolare $H_j(\Omega;\mathbb{Z})$ hanno rango finito per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4.5. *([A4, Theorem 0.4]) Sia X una varietà taut e di tipo topologico finito. Supponiamo che $H^j(X;\mathbb{Q}) = 0$ per ogni $j > 0$, e consideriamo una funzione $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$. Allora la successione $\{F^h\}_{h\in\mathbb{N}}$ non è compattamente divergente se e solo se F ha un punto periodico in X, cioè esistono $x \in X$ e $h_0 \in \mathbb{N}$ tali che $F^{h_0}(x) = x$.*

Corollario 2.4.6. *([BM, Theorem 1.9]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato. Supponiamo che Ω sia taut e che esista un $\kappa_0 > 0$ tale che Ω sia $(1, \kappa_0)$-visibile. Supponiamo inoltre che Ω sia di tipo topologico finito e che $H^j(X;\mathbb{C}) = 0$ per ogni $1 \leq j \leq n$.*

Sia $F : \Omega \longrightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *le orbite dei punti di Ω tramite F sono relativamente compatte in Ω, ed esiste un punto periodico in Ω per F; oppure,*
- *esiste un unico punto di ∂X tale che la successione delle iterate di F converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Dimostrazione. Dato che Ω è un dominio taut limitato, per [Wu, Theorem F] è pseudoconvesso. È allora ben noto che $H^j(\Omega;\mathbb{C}) = 0$ per ogni $j > n$ (si veda [H, Theorem 4.2.7]). Poiché Ω è di tipo topologico finito, per il teorema dei coefficienti universali si ha che

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^j(\Omega;\mathbb{Q}) = \operatorname{rank} H_j(\Omega;\mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{C}} H^j(\Omega;\mathbb{C})$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$. Di conseguenza, $H^j(X;\mathbb{Q}) = 0$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Si conclude facilmente usando il Teorema 2.4.5 e il Corollario 2.4.2. $\square$

Concludiamo il capitolo citando un teorema che mostra come in più variabili, anche nel caso di domini contraibili che soddisfano le ipotesi dei teoremi visti in questa sezione, esistono funzioni con successione delle iterate non compattamente divergente ma senza punti fissi.

Teorema 2.4.7. *([AH, Theorem 1]) Sia $G = \mathbb{Z}/_{pq\mathbb{Z}}$ con p e q primi fra loro. Allora esiste un dominio limitato, pseudoconvesso, taut e contraibile $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ tale che G vi agisce tramite funzioni lineari complesse senza punti fissi.*

3 Esempi di domini con visibilità

Dopo aver dimostrato il Corollario 2.4.2, viene naturale chiedersi: esistono sottovarietà limitate di $\mathbb{C}^n$ che possiamo dimostrare essere taut e visibili per le simil-geodetiche, anche senza ipotesi di regolarità (l'esempio che già conosciamo, i domini strettamente pseudoconvessi, hanno regolarità C^2)?

In questa sezione andremo a vedere diversi esempi di domini limitati in $\mathbb{C}^n$ che soddisfano la condizione di visibilità: due classi di domini, la prima introdotta [BZ1] e della quale studieremo una sottoclasse di esempi espliciti, e la seconda introdotta in [BM] della quale costruiremo un esempio semplice; un ulteriore esempio introdotto in [CMS]. Inoltre, i domini della classe introdotta in [BM] sono anche taut, perciò per essi vale automaticamente il Corollario 2.4.2.

3.1 Domini Goldilocks

Il primo esempio di una classe di domini di $\mathbb{C}^n$ con visibilità è quello, introdotto in [BZ1], dei domini Goldilocks. Prima di darne la definizione, introduciamo, dati un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, un sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{C}^n$ e $r > 0$, la seguente quantità:

$$M_{\Omega,U}(r) := \sup \left\{ \frac{1}{K_\Omega(x;v)} \mid x \in \Omega \cap U, \delta_\Omega(x) \leq r \text{ e } \|v\| = 1 \right\}.$$

Poniamo $M_\Omega := M_{\Omega,\mathbb{C}^n}$. La funzione $M_{\Omega,U}$ è monotona crescente, dunque misurabile secondo Lebesgue; inoltre, segue dal punto (3) della Proposizione 2.2.2 che è anche limitata. Perciò ha senso la definizione che stiamo per dare.

Definizione 3.1.1. Un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ è detto *dominio Goldilocks* se:

(1) esiste (e quindi per ogni) $\varepsilon > 0$ tale che $\displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{1}{r} M_\Omega(r)\,\mathrm{d}r < +\infty$;

(2) per ogni $x_0 \in \Omega$ esistono due costanti $C, \alpha > 0$ (che dipendono da x_0) tali che $k_\Omega(x_0, x) \leq C + \alpha \log \dfrac{1}{\delta_\Omega(x)}$ per ogni $x \in \Omega$.

Osservazione 3.1.2. Il nome particolare, domini Goldilocks (Riccioli d'oro, in italiano), è dovuto al fatto che, come la protagonista della fiaba, tali domini tendono a evitare due estremi "sgradevoli": il bordo non ha cuspidi rivolte verso l'esterno né punti in cui è troppo piatto. Più precisamente:
- nel primo caso, per cosa si intende con 'cuspide rivolta verso l'esterno' rimandiamo alla Definizione 3.3.1 e all'Osservazione 3.3.3. La condizione (2) nella Definizione 3.1.1 è ciò che permette di evitare questo caso nei domini Goldilocks, si veda il passo 5 nella dimostrazione del Teorema 3.3.12;
- nel secondo caso, per 'punti in cui il bordo è troppo piatto' si intende punti per i quali localmente si è in una situazione come quella di [BZ1, Definition 2.7 and Lemma 2.9], fatta eccezione per la condizione di integrabilità di Ψ. Sempre nello stesso articolo, in [BZ1, Remark 2.10] viene spiegato come la condizione

(1) nella Definizione 3.1.1 fa sì che il bordo del dominio tenda a evitare punti in cui il bordo è troppo piatto.

Per vedere che i domini Goldilocks soddisfano la condizione di visibilità, iniziamo mostrando un risultato che ci servirà anche nei prossimi esempi.

Teorema 3.1.3. *([CMS, Theorem 1.9]) Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$. Sia $S \subseteq \partial\Omega$ un insieme chiuso tale che per ogni $p, q \in \partial\Omega$ con $p \neq q$ esistono $p' \in \partial\Omega$ e $r > 0$ tali, detta $B(p', r)$ la palla euclidea di centro p' e raggio r, che:*

(i) si ha $p \in B(p', r)$ e $q \in \partial\Omega \setminus \overline{B(p', r)}$;
(ii) si ha $S \cap \partial B(p', r) = \varnothing$.

Inoltre, supponiamo che per ogni $\xi \in \partial\Omega \setminus S$ esistano un intorno U di ξ, uno $z_0 \in \Omega$ e una funzione C^1 strettamente crescente $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(t) \longrightarrow +\infty$ per $t \longrightarrow +\infty$, tali che:

(1) si ha $k_\Omega(z_0, z) \leq f\big(1/\delta_\Omega(z)\big)$ per ogni $z \in \Omega \cap U$;
(2) si ha $M_{\Omega,U}(r) \longrightarrow 0$ per $r \longrightarrow 0$;
(3) esiste $r_0 > 0$ tale che $\displaystyle\int_0^{r_0} \frac{M_{\Omega,U}(r)}{r^2} f'\left(\frac{1}{r}\right) \mathrm{d}r < +\infty$.

Allora Ω è (λ, κ)-visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$ tali che Ω non sia (λ, κ)-visibile. Allora esistono $p, q \in \partial\Omega$ con $p \neq q$, due successioni $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, convergenti rispettivamente a p e q, e una successione $\{\gamma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di (λ, κ)-simil-geodetiche, con $\gamma_j : [a_j, b_j] \longrightarrow \Omega$ e $\gamma_j(a_j) = p_j$ e $\gamma_j(b_j) = q_j$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, tali che

$$\max_{a_j \leq t \leq b_j} \delta_\Omega\big(\gamma_j(t)\big) \longrightarrow 0 \text{ per } j \longrightarrow +\infty.$$

Per ipotesi esistono $p' \in \partial\Omega$ e $r > 0$ tali che valgano (i) e (ii). Poiché $p_j \longrightarrow p$ e $q_j \longrightarrow q$ per $j \longrightarrow +\infty$, possiamo assumere senza perdita di generalità che $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq B(p', r)$ e $\{q_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega \setminus \overline{B(p', r)}$. Poiché γ_j è una curva continua che collega p_j e q_j, deve esistere $\alpha_j \in (a_j, b_j)$ tale che $\xi_j := \gamma_j(\alpha_j) \in \partial B(p', r)$; a meno di sottosuccessioni, possiamo assumere che $\xi_j \longrightarrow \xi \in \partial\Omega \cap \partial B(p', r)$ per $j \longrightarrow +\infty$. Per (ii) si ha che $\xi \in \partial\Omega \setminus S$; allora esistono, per ipotesi, un intorno U di ξ, uno $z_0 \in \Omega$ e una funzione C^1 strettamente crescente $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che valgano (1), (2) e (3). Osserviamo che tali ipotesi sono ancora soddisfatte se prendiamo un intorno $V \subseteq U$ di ξ, per cui, a meno di prendere un intorno più piccolo, possiamo supporre che $\overline{U} \cap (S \cup \{p, q\}) = \varnothing$; inoltre, di nuovo a meno di sottosuccessioni, possiamo anche supporre che $q_j \notin \overline{U}$.

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B(\xi, \varepsilon)} \subseteq U$; poiché $\xi_j \longrightarrow \xi$ per $j \longrightarrow +\infty$, possiamo assumere senza perdita di generalità che $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq B(\xi, \varepsilon)$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\beta_j := \inf\{t \in [\alpha_j, b_j] \mid \gamma_j(t) \in \partial B(\xi, \varepsilon)\};$$

per definizione di β_j e per il fatto che $\partial B(\xi, \varepsilon)$ è chiuso, si ha $\gamma_j(\beta_j) \in \partial B(\xi, \varepsilon)$, e inoltre si ha $\gamma_j(\alpha_j) = \xi_j \notin \partial B(\xi, \varepsilon)$, per cui $a_j < \alpha_j < \beta_j < b_j$. Poniamo

$\sigma_j := \gamma_j|_{[\alpha_j,\beta_j]} : [\alpha_j,\beta_j] \longrightarrow \Omega$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Poiché $\gamma_j(\alpha_j) = \xi_j \in B(\xi,\varepsilon)$, per definizione di β_j dev'essere $\sigma_j([\alpha_j,\beta_j]) \subseteq \overline{B(\xi,\varepsilon)} \subseteq U$. Notiamo che, essendo la restrizione della (λ,κ)-simil-geodetica γ_j, anche σ_j è una (λ,κ)-simil-geodetica per ogni $j \in \mathbb{N}$; inoltre, si ha

$$\max_{\alpha_j \le t \le \beta_j} \delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big) \le \max_{a_j \le t \le b_j} \delta_\Omega\big(\gamma_j(t)\big) \longrightarrow 0 \text{ per } j \longrightarrow +\infty.$$

Adesso, a meno di riparametrizzare le curve σ_j, possiamo assumere senza perdita di generalità che $\alpha_j \le 0 \le \beta_j$ e che

$$\max_{\alpha_j \le t \le \beta_j} \delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big) = \delta_\Omega\big(\sigma_j(0)\big)$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$. Per la Proposizione 2.2.5 esiste una costante $C > 0$, che dipende solo da λ, tale che le (λ,κ)-simil-geodetiche di Ω sono C-lipschitziane rispetto alla distanza euclidea. Allora, applicando il teorema di Ascoli-Arzelà e passando a un'opportuna sottosuccessione con un procedimento diagonale, possiamo assumere che:

- si ha $\alpha_j \longrightarrow \alpha \in [-\infty, 0]$ e $\beta_j \longrightarrow \beta \in [0, +\infty]$ per $j \longrightarrow +\infty$;
- la successione $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sui compatti di (α,β) a una curva continua $\sigma : (\alpha,\beta) \longrightarrow \overline{B(\xi,\varepsilon)} \subseteq U$;
- si ha $\sigma_j(\alpha_j) = \xi_j \longrightarrow \xi$ e $\sigma_j(\beta_j) = \eta_j \longrightarrow \eta$ per $j \longrightarrow +\infty$, con $\xi \in \partial\Omega \cap \partial B(p',r)$ e $\eta \in \partial\Omega \cap \partial B(\xi,\varepsilon)$.

Ovviamente dev'essere $\xi \neq \eta$; quindi, dato che $\|\sigma(\alpha_j) - \sigma(\beta_j)\| \le C(\beta_j - \alpha_j)$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, si ha che $C(\beta - \alpha) \ge \|\xi - \eta\| > 0$, per cui $\beta > \alpha$.

Mostriamo adesso che σ è costante. Vediamo innanzitutto che per ogni $j \in \mathbb{N}$ e per quasi ogni $t \in (\alpha_j,\beta_j)$ si ha

$$\|\sigma_j'(t)\| \le \lambda M_{\Omega,U}\Big(\delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big)\Big).$$

Sia $t \in (\alpha_j,\beta_j)$ tale che $\sigma_j'(t)$ esiste e $\|\sigma_j'(t)\| \neq 0$ (altrimenti la disuguaglianza è immediata). Ricordiamo che ogni σ_j è una (λ,κ)-simil-geodetica, per cui $K_\Omega\big(\sigma_j(t);\sigma_j'(t)\big) \le \lambda$; quindi, dato che $\sigma_j([\alpha_j,\beta_j]) \subseteq U$, si ha

$$\|\sigma_j'(t)\| \le \frac{\lambda}{K_\Omega\left(\sigma_j(t); \frac{\sigma_j'(t)}{\|\sigma_j'(t)\|}\right)} \le \lambda M_{\Omega,U}\Big(\delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big)\Big),$$

come voluto. Adesso, poiché $\max_{\alpha_j \le t \le \beta_j} \delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big) \longrightarrow 0$ per $j \longrightarrow +\infty$, dal fatto che $M_{\Omega,U}$ è crescente e dall'ipotesi (2) si ha che $M_{\Omega,U}\Big(\delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big)\Big) \longrightarrow 0$

uniformemente. Ma allora, dati $\alpha < u \le w < \beta$, si ha

$$\begin{aligned}\|\sigma(u)-\sigma(w)\| &\le \lim_{j\longrightarrow+\infty}\|\sigma_j(u)-\sigma_j(w)\|\\ &= \lim_{j\longrightarrow+\infty}\left\|\int_u^w \sigma_j'(t)\,\mathrm{d}t\right\| \le \limsup_{j\longrightarrow+\infty}\int_u^w \|\sigma_j'(t)\|\,\mathrm{d}t\\ &\le \lambda\limsup_{j\longrightarrow+\infty}\int_u^w M_{\Omega,U}\Big(\delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t = 0;\end{aligned}$$

dunque σ è costante su (α,β).

Vogliamo ottenere una contraddizione mostrando anche che σ non è costante. Distinguiamo due casi.

Caso 1: sia α che β sono finiti. Per ogni $j\in\mathbb{N}$, definiamo al seguente modo la curva $\tilde\sigma_j : [\alpha,\beta]\longrightarrow\Omega$: restringiamo σ_j all'intervallo $[\alpha_j,\beta_j]\cap[\alpha,\beta]$ ed estendiamola ad una costante sugli intervalli $[\alpha,\alpha_j]$ e $[\beta_j,\beta]$ se $\alpha<\alpha_j$ o $\beta_j<\beta$. È facile vedere che le $\tilde\sigma_j$ sono ancora C-lipschitziane, per cui, applicando di nuovo Ascoli-Arzelà, a meno di sottosuccessioni convergono, uniformemente sui compatti, a una curva continua $\tilde\sigma : [\alpha,\beta]\longrightarrow\overline{\Omega}$. Questa curva estende in modo continuo σ a tutto $[\alpha,\beta]$ e $\tilde\sigma(\alpha)=\xi\neq\eta=\tilde\sigma(\beta)$, per cui $\tilde\sigma$ non è costante, e di conseguenza non lo è neanche σ.

Caso 2: $\alpha=-\infty$ o $\beta=+\infty$. Ricordiamo che σ_j è una (λ,κ)-simil-geodetica per ogni $j\in\mathbb{N}$; dunque si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}|t|-\kappa &\le k_\Omega\big(\sigma_j(0),\sigma_j(t)\big)\\ &\le k_\Omega\big(\sigma_j(0),z_0\big)+k_\Omega\big(z_0,\sigma_j(t)\big)\le 2f\left(\frac{1}{\delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big)}\right),\end{aligned}\tag{27}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dall'ipotesi (1), dal fatto che per ogni $j\in\mathbb{N}$ si ha $\sigma_j([\alpha_j,\beta_j])\subseteq\Omega\cap U$ e da $\max\limits_{\alpha_j\le t\le\beta_j}\delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big)=\delta_\Omega\big(\sigma_j(0)\big)$.

Consideriamo il caso $\beta=+\infty$. Poiché la successione $\{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ e f è continua con $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty}f(t)=+\infty$, esistono un naturale $N\in\mathbb{N}$ e una costante $B>0$ tali che per ogni $j\ge N$ e $t\in(B,\beta_j]$ si ha $\dfrac{|t|}{2\lambda}-\dfrac{\kappa}{2}\in f\big((0,+\infty)\big)$. Usando anche la disuguaglianza (27) e il fatto che f è strettamente crescente, troviamo che

$$f^{-1}\left(\frac{|t|}{2\lambda}-\frac{\kappa}{2}\right)\le\frac{1}{\delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big)}$$

per ogni $j\ge N$ e $t\in(B,\beta_j]$. Se $\alpha=-\infty$, ragionando allo stesso modo troviamo un intero N' e una costante $A>0$ tali che

$$f^{-1}\left(\frac{|t|}{2\lambda}-\frac{\kappa}{2}\right)\le\frac{1}{\delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big)}$$

per ogni $j \geq N'$ e $t \in [\alpha_j, -A)$. Vediamo il caso $\alpha = -\infty$ e $\beta = +\infty$. Dalle due disuguaglianze appena mostrate, usando anche che $\|\sigma_j'(t)\| \leq \lambda M_{\Omega,U}\Big(\delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big)\Big)$ e che $M_{\Omega,U}$ è crescente, troviamo che

$$\|\sigma_j'(t)\| \leq \lambda M_{\Omega,U}\left(\frac{1}{f^{-1}\left(\frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2}\right)}\right)$$

per ogni $j \geq \max\{N, N'\}$ e per quasi ogni $t \in [\alpha_j, -A) \cup (B, \beta_j]$. Usando l'ipotesi (3) e il cambio di variabile $r = \dfrac{1}{f^{-1}\left(\frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2}\right)}$, si ha che esistono due costanti $c \in (-\infty, -A)$ e $d \in (B, +\infty)$ tali che

$$\lambda \int_{-\infty}^{c} M_{\Omega,U}\left(\frac{1}{f^{-1}\left(\frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2}\right)}\right) \mathrm{d}t + \lambda \int_{d}^{+\infty} M_{\Omega,U}\left(\frac{1}{f^{-1}\left(\frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2}\right)}\right) \mathrm{d}t < \|\xi - \eta\|.$$

Allora, usando le ultime due disuguaglianze, otteniamo

$$\begin{aligned}
\|\sigma(d) - \sigma(c)\| &= \lim_{j \longrightarrow +\infty} \|\sigma_j(d) - \sigma_j(c)\| \\
&\geq \liminf_{j \longrightarrow +\infty} \big(\|\sigma_j(\beta_j) - \sigma_j(\alpha_j)\| - \|\sigma_j(\alpha_j) - \sigma_j(c)\| \\
&\qquad - \|\sigma_j(\beta_j) - \sigma_j(d)\|\big) \\
&\geq \lim_{j \longrightarrow +\infty} \|\sigma_j(\beta_j) - \sigma_j(\alpha_j)\| - \limsup_{j \longrightarrow +\infty} \left\|\int_{\alpha_j}^{c} \sigma_j'(t)\, \mathrm{d}t\right\| \\
&\quad - \limsup_{j \longrightarrow +\infty} \left\|\int_{d}^{\beta_j} \sigma_j'(t)\, \mathrm{d}t\right\| \\
&\geq \|\xi - \eta\| - \limsup_{j \longrightarrow +\infty} \int_{\alpha_j}^{c} \|\sigma_j'(t)\|\, \mathrm{d}t - \limsup_{j \longrightarrow +\infty} \int_{d}^{\beta_j} \|\sigma_j'(t)\|\, \mathrm{d}t \\
&\geq \|\xi - \eta\| - \limsup_{j \longrightarrow +\infty} \lambda \int_{\alpha_j}^{c} M_{\Omega,U}\left(\frac{1}{f^{-1}\left(\frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2}\right)}\right) \mathrm{d}t \\
&\qquad - \limsup_{j \longrightarrow +\infty} \lambda \int_{d}^{\beta_j} M_{\Omega,U}\left(\frac{1}{f^{-1}\left(\frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2}\right)}\right) \mathrm{d}t \\
&= \|\xi - \eta\| - \lambda \int_{-\infty}^{c} M_{\Omega,U}\left(\frac{1}{f^{-1}\left(\frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2}\right)}\right) \mathrm{d}t \\
&\qquad - \lambda \int_{d}^{+\infty} M_{\Omega,U}\left(\frac{1}{f^{-1}\left(\frac{|t|}{2\lambda} - \frac{\kappa}{2}\right)}\right) \mathrm{d}t > 0;
\end{aligned}$$

dunque in questo caso σ non è costante. Se invece $a < -\infty$ e $b = +\infty$ (il caso $a = -\infty$ e $b < +\infty$ è analogo), ragionando come nel caso 1 estendiamo le σ_j a delle $\tilde{\sigma}_j$ che, a meno di sottosuccessioni, convergono uniformemente sui compatti a una curva continua $\tilde{\sigma} : [\alpha, +\infty) \longrightarrow \overline{\Omega}$ che estende σ. Allora basta ripetere la stima precedente con $\tilde{\sigma}_j, \tilde{\sigma}$ e α al posto di σ_j, σ e c e scegliendo un d opportuno, trovando così che $\tilde{\sigma}$, e di conseguenza σ, non è costante.

Poiché la nostra assunzione porta a una contraddizione, dev'essere falsa, da cui la tesi. $\square$

Adesso mostriamo che i domini Goldilocks sono visibili per le simil-geodetiche.

Corollario 3.1.4. *Un dominio limitato Goldilocks $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ è (λ, κ)-visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$.*

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 3.1.3 con $S = \varnothing$, $U = \mathbb{C}^n$, per cui abbiamo che $f(x) = C + \alpha \log x$, con C e α dati dal punto (2) della Definizione 3.1.1 per un punto fissato. $\square$

Un esempio esplicito di domini Goldilocks sono i domini limitati, pseudoconvessi e di tipo finito.

3.2 Domini di tipo finito

Vogliamo ora discutere dei domini di tipo finito, che sono un esempio di domini Goldilocks. Iniziamo con la definizione di dominio di tipo finito nel senso di D'Angelo, introdotta in [D'A].

Definizione 3.2.1. Dati un aperto $A \subseteq \mathbb{C}^n$, una funzione $g \in C^\infty(A)$ e $p \in A$, *l'ordine (o la molteplicità) di g in p* è $v_p(g)$, il grado del primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor in p di $g - g(p)$. Se la funzione è a valori in più variabili, si considera il minimo degli ordini delle componenti.

Definizione 3.2.2. Un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ha bordo C^∞ se esiste una funzione $\rho \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ tale che $\Omega = \{\rho(z) < 0\}$ e $\mathrm{d}\rho \neq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$.

Definizione 3.2.3. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio con bordo C^∞ e $\xi \in \partial\Omega$. L'insieme dei *dischi analitici* che toccano il bordo di Ω in ξ e che sono lisci nell'origine è dato da

$$\mathcal{D}_\xi = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n) \mid f(0) = \xi\}.$$

Definizione 3.2.4. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio con bordo C^∞ e funzione di definzione ρ e $\xi \in \partial\Omega$. Il *tipo* di ξ è dato da

$$\Delta_1(\xi) := \sup_{f \in \mathcal{D}_\xi} \frac{v_0(\rho \circ f)}{v_0(f)}.$$

Definizione 3.2.5. Un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ con bordo C^∞ si dice *di tipo finito nel senso di D'Angelo* (o più brevemente *di tipo finito*) se $\Delta_1(\xi) < +\infty$ per ogni $\xi \in \partial\Omega$.

Osservazione 3.2.6.

1. Esistono diverse definizioni di dominio di tipo finito, che sono sostanzialmente equivalenti (o quasi) in due variabili o per domini convessi in qualsiasi numero di variabili; negli altri casi, invece, la situazione è più complicata. Noi ci limiteremo al caso di domini di tipo finito nel senso di D'Angelo, poiché è ciò che ci serve per ottenere la stima dal basso sulla metrica di Kobayashi.
2. È naturale supporre, come faremo a breve, la pseudoconvessità del dominio; infatti, si può mostrare ([D'A, Corollary 5.6] con $p = p_0$) che in tal caso il tipo del dominio è almeno 2. Inoltre, i punti strettamente pseudoconvessi hanno tipo esattamente uguale a 2 ([D'A, Corollary 5.8]).

Ci servirà il seguente fatto.

Teorema 3.2.7. *([Ch, Theorem 1]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato. Siano inoltre $\xi \in \partial\Omega$ di tipo finito e U un intorno di ξ tale che $\partial\Omega \cap U$ è liscio e pseudoconvesso. Allora esistono un intorno $V \subseteq U$ di ξ e due costanti $c, \varepsilon > 0$ tali che si ha*

$$K_\Omega(z; Z) \geq c \frac{\|Z\|}{\delta_\Omega(z)^\varepsilon}$$

per ogni $z \in \Omega \cap V$ e $Z \in T_z\Omega$.

Possiamo allora dimostrare che per i domini limitati, pseudoconvessi e di tipo finito vale la condizione (1) nella definizione di dominio Goldilocks.

Corollario 3.2.8. *([BZ1, Lemma 2.6]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato, pseudoconvesso e di tipo finito. Allora Ω soddisfa la condizione (1) nella Definizione 3.1.1.*

Dimostrazione. Poiché Ω è limitato, pseudoconvesso e di tipo finito, $\partial\Omega$ è compatto e ogni intorno di ogni suo punto soddisfa le ipotesi del Teorema 3.2.7. Possiamo allora trovare un numero finito di aperti $V_1, \ldots, V_N$ che ricoprono $\partial\Omega$ e delle costanti $c, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N > 0$ tali che

$$K_\Omega(x; v) \geq c \cdot \delta_\Omega(z)^{-\varepsilon_j}$$

per ogni $z \in \Omega \cap V_j$ e $v \in T_z\Omega$ con $\|v\| = 1$.

Basta dunque prendere $s = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N\}$ e $r > 0$ piccolo abbastanza affinché $r < 1$ e $\{z \in \Omega \mid \delta_\Omega(z) \leq r\} \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_N$. Segue che

$$M_\Omega(r) \leq r^s / c$$

con $s > 0$ per r sufficientemente piccolo, per cui la condizione (1) nella Definizione 3.1.1 è soddisfatta. $\square$

Andiamo ora a dimostrare che soddisfano anche la condizione (2). Per questa servono ipotesi meno stringenti.

Proposizione 3.2.9. *([A1, Proposition 1.2]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato con bordo C^2. Allora Ω soddisfa la condizione (2) nella Definizione 3.1.1.*

Dimostrazione. Per [Sp, Chapter 9, Theorem 20], $\partial\Omega$ ammette un intorno tubolare U_ε, con $\varepsilon > 0$, tale che:

(i) si ha $U_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \delta_\Omega(z) < \varepsilon\}$;
(ii) per ogni $z \in \Omega \cap U_\varepsilon$ esiste un unico punto $\pi(z) \in \partial\Omega$ con $\|\pi(z) - z\| = \delta_\Omega(z)$;
(iii) per ogni $z \in \Omega$, la fibra $\pi^{-1}\big(\pi(z)\big)$ è un sottoinsieme della normale a $\partial\Omega$ in $\pi(z)$;
(iv) la mappa $z \longmapsto \big(\pi(z), \delta_\Omega(z)\big)$ è un omeomorfismo tra U_ε e $\partial\Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.

È facile osservare che, per ogni $z \in \Omega$ con $\delta_\Omega(z) = \varepsilon$, si ha che la palla euclidea di centro z e raggio ε è tutta contenuta in Ω. Presi allora $p, q \in \Omega$ con $\pi(p) = \pi(q)$ e $\varepsilon \geq \delta_\Omega(p) \geq \delta_\Omega(q)$, poniamo z_0 il punto (interno a Ω) della normale a $\partial\Omega$ in $\pi(p)$ tale che $\delta_\Omega(z_0) = \varepsilon$. Usando la funzione olomorfa $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$ data da $\varphi(\zeta) = z_0 + \zeta\big(\pi(p) - z_0\big)$, troviamo

$$k_\Omega(p, q) \leq \frac{1}{2} \log \frac{\delta_\Omega(p)}{\delta_\Omega(q)}.$$

Adesso, notiamo che l'insieme $K = \{z \in \Omega \mid \delta_\Omega(z) \geq \varepsilon\}$ è compatto. Dato $x_0 \in \Omega$, basta allora prendere $\alpha = 1/2$ e $C = \frac{1}{2} \log \varepsilon + D_{k_\Omega}(x_0, K)$, dove abbiamo posto $D_{k_\Omega}(x_0, K) = \max\{k_\Omega(x_0, z) \mid z \in K\}$. Segue dunque che Ω soddisfa la condizione (2) nella Definizione 3.1.1. $\square$

Da quanto dimostrato, discende un teorema di tipo "Wolff-Denjoy".

Corollario 3.2.10. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato, pseudoconvesso e di tipo finito e $F : \Omega \longrightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *le orbite dei punti di Ω tramite F sono relativamente compatte in Ω; oppure,*
- *esiste un unico punto di $\partial\Omega$ tale che la successione delle iterate di F converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Dimostrazione. Per il Corollario 3.2.8 e la Proposizione 3.2.9 si ha che Ω è un dominio Goldilocks. Per la Proposizione 1.2.35 abbiamo che è anche taut. Usando anche il Corollario 3.1.4, segue che Ω soddisfa le ipotesi del Corollario 2.4.2. $\square$

3.3 Domini Caltrop

Il secondo esempio, introdotto in [BM], è quello dei domini Caltrop.

Definizione 3.3.1. Un dominio limitato $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, è detto *dominio Caltrop* se esiste un insieme finito di punti $\{q_1, \ldots, q_N\} \subseteq \partial\Omega$ tale che:

- il sottoinsieme del bordo $\partial\Omega \setminus \{q_1, \ldots, q_N\}$ è C^2 e Ω è strettamente pseudoconvesso in ogni punto di tale insieme;
- per ogni $j = 1, \ldots, N$ esiste un intorno aperto e connesso $V_j \ni q_j$ tale che esistono una trasformazione unitaria $\mathbb{U}^{(j)}$ e una funzione continua $\psi_j : [0, A_j] \longrightarrow [0, +\infty)$, con $A_j > 0$, tali che $\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j)$ è dato da

$$\mathbb{U}_j(\Omega \cap V_j) = \Bigg\{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n \in (0, A_j), \\ (\mathfrak{Im} z_n)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 < \psi_j(\mathfrak{Re} z_n)^2 \Bigg\},$$

  dove $\mathbb{U}_j(z) = \mathbb{U}^{(j)}(z - q_j)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$. Inoltre, esistono due costanti $p_j \in (1, 3/2)$ e $C_j > 1$ tali che ψ_j ha le seguenti proprietà:
  - è di classe C^2 su $(0, A_j)$;
  - per ogni $x \in [0, A_j]$ si ha $(1/C_j)x^{p_j} \leq \psi_j(x) \leq C_j x^{p_j}$;
  - si ha che ψ_j è strettamente crescente e convessa;
  - si ha $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \psi_j(x)\psi_j''(x) = 0$.

Osservazione 3.3.2. La condizione $p_j > 1$ è necessaria perché in seguito ci servirà poter definire $\alpha = \dfrac{1}{p-1}$ per $p = p_j$; la condizione $p_j < 3/2$, invece, serve per una stima all'interno di una dimostrazione.

Osservazione 3.3.3. Il nome, che in italiano può essere tradotto come tribolo o "piede di corvo" (un'arma da lancio a quattro punte), rimanda al fatto che, vicino ai punti in cui non è liscio, il bordo di tali domini assume una forma simile a quella di una cuspide hölderiana non eccessivamente appuntita.

Ci occupiamo adesso di mostrare che i domini Caltrop esistono. Vediamo l'esempio di un dominio Caltrop con una sola punta in $\mathbb{C}^2$. Siano $A, \beta > 0$ e sia $\psi : [-A, \beta] \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua di classe C^2 su $(-A, \beta)$ tale che:

(1) per ogni $t \in [-A, -B)$ si ha $\psi(t) = (t + A)^p$;
(2) per ogni $t \in (0, \beta]$ si ha $\psi(t) = \sqrt{\beta^2 - t^2}$,

dove $B \in (0, A)$ e $p \in (1, 3/2)$. Consideriamo

$$\Omega := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |\mathfrak{Im} w|^2 < C\psi(\mathfrak{Re} w)^2, -A < \mathfrak{Re} w < \beta\},$$

dove $C > 0$ è una costante che sceglieremo più avanti.

Poniamo inoltre

$$\rho(z, w) := |z|^2 + |\mathfrak{Im} w|^2 - C\psi(\mathfrak{Re} w)^2,$$

considerata sull'insieme $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid -A < \mathfrak{Re} w < \beta + \varepsilon\}$, dove $\varepsilon > 0$ è fissato e ψ^2 è estesa a $\beta^2 - x^2$ per ogni $x \in (\beta, \beta + \varepsilon)$. Si verifica che ρ è una funzione di

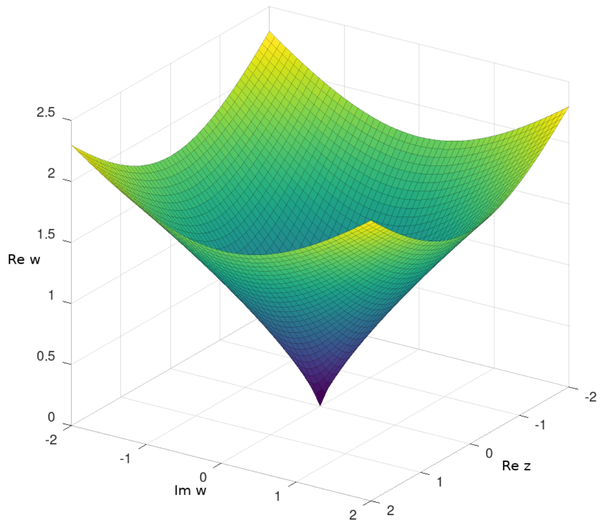

Figura 3: proiezione a $\mathfrak{Im} z = 0$ del bordo della punta in $\mathbb{C}^2$ con coordinate (z, w) corrispondente a $\psi(x) = x^{5/4}$

classe C^2 avente $\partial\Omega$ come luogo di zeri. Calcoliamo le seguenti derivati parziali seconde:

$$\partial^2_{z\bar{z}}\rho \equiv 1;$$
$$\partial^2_{z\bar{w}}\rho = \partial^2_{\bar{z}w}\rho \equiv 0;$$
$$\partial^2_{w\bar{w}}\rho(z, w) = \frac{1}{2} - \frac{C}{2}\big(\psi''(\mathfrak{Re} w)\psi(\mathfrak{Re} w) + \psi'(\mathfrak{Re} w)^2\big).$$

In particolare, si ha che

$$\partial^2_{w\bar{w}}\rho(z, w) - \frac{1}{2} = -\frac{Cp(2p-1)}{2}(\mathfrak{Re} w + A)^{2(p-1)}$$

per $\mathfrak{Re} w$ sufficientemente vicino a $-A$, che tende crescendo a 0 per $\mathfrak{Re} w$ che tende descrescendo a $-A$. Allora, essendo ψ di classe C^2 su $(-A, \beta)$, scegliendo C sufficientemente piccolo possiamo imporre che $\partial^2_{w\bar{w}}\rho(z, w) \geq \frac{1}{4}$ per ogni w tale che $-A < \mathfrak{Re} w \leq 0$. Segue che $\partial\Omega \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid -A < \mathfrak{Re} w \leq 0\}$ è un sottoinsieme di punti strettamente pseudoconvessi del bordo di Ω. Per la condizione (2) su ψ, anche $\partial\Omega \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathfrak{Re} w > 0\}$ lo è. Le altre proprietà di dominio Caltrop seguono dalla condizione (1) su ψ; la punta è in $(0, -A)$.

In [BM, Section 3.2] vengono costruiti domini Caltrop con un numero arbitrario di punte.

Vediamo adesso che i domini Caltrop hanno le proprietà volute. Vogliamo mostrare innanzitutto la condizione di visibilità e il fatto che non possono mai essere domini Goldilocks, per cui i domini con visibilità sono una classe più ampia che contiene sia i domini Goldilocks che i domini Caltrop. Per fare ciò, vogliamo applicare il Teorema 3.1.3 con $U = \mathbb{C}^n$, per cui $M_{\Omega,U} = M_\Omega$, e $S = \varnothing$. Per mostrare che un dominio Caltrop Ω soddisfa le ipotesi del Teorema 3.1.3 l'idea, spiegata in [BM, Section 6], è la seguente: si calcola k_D per un dominio planare D che useremo come modello, dopodiché immergeremo copie di D in Ω in maniera affine, di modo che ogni punto di Ω sufficientemente vicino al bordo sia contenuto in una di queste copie. A questo punto, useremo la Proposizione 1.1.15 per stimare la distanza di Kobayashi su Ω.

Per essere precisi, useremo una classe di domini con certe proprietà, che adesso andiamo a costruire. Dati $a, h > 0$, poniamo

$$S_{a,h} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re} z > a \text{ e } -h < \mathfrak{Im} z < h\}.$$

Indichiamo con $T_{a,h}$ l'immagine di $S_{a,h}$ tramite la mappa $z \longmapsto 1/z$ e notiamo che

$$T_{a,h} = \left(\mathbb{C} \setminus \overline{D\left(\frac{-i}{2h}, \frac{1}{2h}\right)}\right) \cap \left(\mathbb{C} \setminus \overline{D\left(\frac{i}{2h}, \frac{1}{2h}\right)}\right) \cap D\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right).$$

Indichiamo con $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$ l'immagine di $T_{a,h}$ tramite la mappa $\phi_\alpha(z) = z^\alpha$, dove α è un reale maggiore di 1 e a e h sono scelti in modo che ϕ_α sia un biolomorfismo.

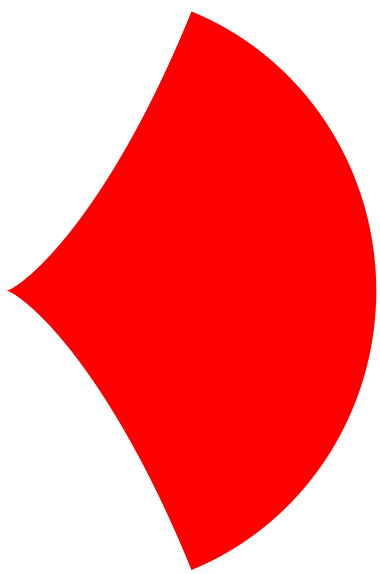

Figura 4: Il dominio $\mathcal{Q}^{5,\frac{1}{2},\frac{1}{10}}$

Osserviamo che $T_{a,h}$ ha una cuspide quadratica in 0. Dunque esistono due costanti $c_1, c_2 > 0$ tali che per ogni $z \in \partial T_{a,h}$ si ha

$$c_1(\mathfrak{Re} z)^2 \leq |\mathfrak{Im} z| \leq c_2(\mathfrak{Re} z)^2 \tag{28}$$

per $\mathfrak{Re} z$ sufficientemente piccola. Più precisamente, per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo l'insieme $\partial T_{a,h} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathfrak{Re} \leq \delta\}$ è dato dall'unione dei grafici di f e $-f$, dove, posto $z = x + iy$, si ha $f(x) = \frac{1}{2h} - \sqrt{\frac{1}{4h^2} - x^2}$, per cui abbiamo che

$$f(x) = hx^2 + O(x^4) \tag{29}$$

per $x \longrightarrow 0^+$.

Osservazione 3.3.4. Scrivendo l'equazione esplicita per il bordo di $\mathcal{Q}^{2,a,1}$ vicino a 0, con a sufficientemente grande, troviamo una cardioide, della quale ricordiamo la cuspide proprio in 0. Tuttavia, sebbene semplice da calcolare, il caso $\alpha = 2$ non è contemplato per via di una costrizione che imporremo più avanti.

Il seguente risultato sulle proprietà dei domini $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$ sarà quello usato per ottenere stime sulla distanza di Kobayashi dei domini Caltrop.

Proposizione 3.3.5. *Sia $\alpha > 1$ e sia $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$ come sopra, con $a, h > 0$ scelti opportunamente. Poniamo $p = (1 + \alpha)/\alpha$; allora*

(1) esistono delle costanti $\varepsilon, C_1, C_2 > 0$ tali che, per ogni $z \in \partial\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$ con $0 \leq \mathfrak{Re} z \leq \varepsilon$, si ha che

$$C_1(\mathfrak{Re} z)^p \leq |\mathfrak{Im} z| \leq C_2(\mathfrak{Re} z)^p;$$

(2) fissata una costante $M > 1$ esiste $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che la disuguaglianza al punto (1) vale con $C_2 = Mh\alpha$. Inoltre, fissati $\alpha > 1$ e $h > 0$, tale scelta di ε decresce al crescere di a;

(3) fissiamo un punto $x_0 \in \mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \cap \mathbb{R}$. Esiste una costante $C = C(x_0) > 0$ tale che per ogni $x \in (0, x_0)$ si ha che

$$k_{\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}}(x_0, x) \leq C + \frac{\pi}{4h} x^{-1/\alpha}.$$

Dimostrazione. Siano c_1 e c_2 le costanti date in (28), e sia f la funzione di (29), cioè $f(x) = \frac{1}{2h} - \sqrt{\frac{1}{4h^2} - x^2}$. Vogliamo studiare l'immagine dei grafici di f e $-f$ tramite ϕ_α. Per simmetria, ci basterò studiare l'immagine del grafico di f. Scriviamo z nel grafico di f sufficientemente vicino a 0 come $z = x + iy$, con $x \geq 0$ e $c_1x^2 \leq y \leq c_2x^2$. Per $x > 0$ sufficientemente piccolo, svolgiamo il seguente conto:

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha(z) &= (x+iy)^\alpha \\
&= x^\alpha \left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \prod_{\nu=0}^{2j-1} (\alpha-\nu) \frac{y^{2j}}{x^{2j}} \right) \\
&\quad + i x^\alpha \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \prod_{\nu=0}^{2j} (\alpha-\nu) \frac{y^{2j+1}}{x^{2j+1}} \right).
\end{aligned}$$

Usando il fatto che $c_1 x^2 \le y \le c_2 x^2$, si vede facilmente che

$$\mathfrak{Re}\big(\phi_\alpha(z)\big) = x^\alpha + O(x^{2+\alpha})$$

e

$$c_1 \alpha x^{1+\alpha}\big(1 - O(x^2)\big) \le \mathfrak{Im}\big(\phi_\alpha(z)\big) \le c_2 \alpha x^{1+\alpha}\big(1 + O(x^2)\big)$$

per $z = x + iy$ nel grafico di f e $x > 0$ sufficientemente piccolo. Da queste disuguaglianze segue la tesi del punto (1).

Il punto (2) segue dalle stime con le quali abbiamo dimostrato il punto (1), e da come l'intervallo in cui ci interessa studiare f dipende, per costruzione, da a.

Consideriamo il biolomorfismo $\Phi_{\alpha,a,h}$ da $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$ in $\mathbb{D}$ dato da

$$\Phi_{\alpha,a,h} = f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ g \circ (\phi_\alpha|_{T_{a,h}})^{-1},$$

dove

$$\begin{aligned}
g(z) &= 1/z \text{ per ogni } z \in T_{a,h}, \\
f_1(z) &= \frac{\pi i}{2h}(z-a) \text{ per ogni } z \in S_{a,h}, \\
f_2(z) &= \sin z \text{ per ogni } z \in \mathbb{C} \text{ con } -\pi/2 < \mathfrak{Re} z < \pi/2 \text{ e } \mathfrak{Im} z > 0, \\
f_3(z) &= \frac{z-i}{z+i} \text{ per ogni } z \in \mathbb{C} \text{ con } \mathfrak{Im} z > 0.
\end{aligned}$$

Osserviamo che $\Phi_{\alpha,a,h}$ manda l'intervallo chiuso e limitato $\overline{\mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \cap \mathbb{R}}$ omeomorficamente in $[-1,1]$. Inoltre, manda il punto $o = \dfrac{1}{\big(\frac{2h}{\pi}\log(\sqrt{2}+1)+a\big)^\alpha}$ in 0, e se $x \in \mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \cap \mathbb{R}$ è minore di o allora $\Phi_{\alpha,a,h}(x) \in (0,1)$. Allora per tali x si ha che

$$k_{\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}}(o,x) = k_{\mathbb{D}}\big(0, \Phi_{\alpha,a,h}(x)\big) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\Phi_{\alpha,a,h}(x)}{1-\Phi_{\alpha,a,h}(x)}\right).$$

Calcolando esplicitamente $\Phi_{\alpha,a,h}(x)$, troviamo che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\Phi_{\alpha,a,h}(x)}{1-\Phi_{\alpha,a,h}(x)}\right) &= \frac{1}{2}\log\left(e^{\frac{\pi}{2h}\left(\frac{1}{x^{1/\alpha}}-a\right)} - e^{-\frac{\pi}{2h}\left(\frac{1}{x^{1/\alpha}}-a\right)}\right) - \frac{\log 2}{2} \\
&\le \frac{1}{2}\log\left(e^{\frac{\pi}{2h}\left(\frac{1}{x^{1/\alpha}}-a\right)}\right) \le \frac{\pi}{4h} x^{-1/\alpha};
\end{aligned}$$

usando anche la disuguaglianza triangolare, otteniamo così la tesi del punto (3). $\square$

I prossimi risultati saranno quelli necessari a immergere affinamente copie di $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$ in un dominio Caltrop nel modo voluto. Nel seguito, con o indichiamo il punto introdotto nella dimostrazione della Proposizione 3.3.5, associato al dominio $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$ che staremo trattando.

Lemma 3.3.6. *Siano $\varepsilon > 0$ e $\phi : [0,\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, strettamente crescente e derivabile in $(0,\varepsilon)$. Supponiamo che ϕ' sia strettamente crescente e che $\phi(0) = 0$. Allora per ogni $(x,y) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty)$ tale che $x + y < \varepsilon$ si ha che $\phi(x+y) \geq \phi(x) + \phi(y)$.*

Dimostrazione. È una banale conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale. $\square$

Lemma 3.3.7. *Siano $A > 0$ e $\psi : [0,A] \longrightarrow [0,+\infty)$ una funzione continua di classe C^2 su $(0,A)$, e sia $p \in (1,2)$. Supponiamo inoltre che:*

- *esiste una costante $C > 1$ tale che $x^p/C \leq \psi(x) \leq Cx^p$ per ogni $x \in [0,A]$;*
- *ψ è strettamente crescente;*
- *ψ' è strettamente crescente su $(0,A)$.*

Poniamo $\mathcal{R} := \big\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathfrak{Re}z < A$ e $|\mathfrak{Im}z| < \psi\big(\mathfrak{Re}z\big)\big\}$. Allora esistono una costante $B \in (0,A)$, un compatto K che interseca $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}z = A\}$ e tale che $K \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}z = A\} \subsetneq \mathcal{R}$, e due costanti $a,h > 0$ tali che per ogni $x + iy \in \mathcal{R}$ con $x \leq B$ si ha che:

(1) $\big(\psi^{-1}(|y|) + iy\big) + \mathcal{Q}^{1/(p-1),a,h} \subseteq \mathcal{R}$;
(2) $\psi^{-1}(|y|) + o > x$;
(3) $\big(\psi^{-1}(|y|) + iy\big) + o \in K$;
(4) $\delta_{\mathcal{R}}(x+iy) \leq |\psi^{-1}(|y|) - x|$.

Dimostrazione. Per il punto (2) della Proposizione 3.3.5, possiamo fissare una costante $M > 1$ tale che per ogni $\alpha > 1$ e ogni $a,h > 0$ esiste $\varepsilon = \varepsilon(\alpha,a,h) > 0$ tale che

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \cap \{\mathfrak{Re}w < \varepsilon\} \subseteq \{&w \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathfrak{Re}w < \varepsilon \text{ e } |\mathfrak{Im}w| < Mh\alpha(\mathfrak{Re}w)^{(1+\alpha)/\alpha}\}\\ &=: S^{\alpha,a,h},\end{aligned}$$

e tale che, per α e h fissati, $\varepsilon \longrightarrow 0$ per $a \longrightarrow +\infty$; notiamo anche che possiamo imporre $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \cap \{\mathfrak{Re}w < \varepsilon\} = \mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$ per a sufficientemente grande. Fissiamo adesso $\alpha = 1/(p-1)$. Poiché, per costruzione di $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$, a parte reale fissata di un punto del bordo la parte immaginaria decresce, la costante ε scelta non decresce al decrescere di h. Allora possiamo scegliere a sufficientemente grande e h sufficientemente piccolo, in modo che $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \cap \{\mathfrak{Re}w < \varepsilon\} = \mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$ e $\varepsilon, o < A/2$, e $Mh\alpha < 1/C$.

Adesso fissiamo una costante $B \in (0, A)$ tale che $B < \min\{o, \varepsilon/2\}$. Sia $z = x + iy \in \mathcal{R}$ con $x \le B$. Consideriamo l'insieme $\big(\psi^{-1}(|y|) + iy\big) + \mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$. Un elemento arbitrario di questo insieme è della forma $\big(\psi^{-1}(|y|) + s\big) + i(y + t)$, con $s + it \in \mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$. Dato che $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \subseteq S^{\alpha,a,h}$, si ha $0 < s < \varepsilon$ e $|t| < Mh\alpha s^p$. Il punto $\big(\psi^{-1}(|y|) + s\big) + i(y + t)$ sta in $\mathcal{R}$ se e solo

$$0 < \psi^{-1}(|y|) + s < A$$
$$\text{e}$$
$$|y + t| < \psi\big(\psi^{-1}(|y|) + s\big).$$

Poiché $x + iy \in \mathcal{R}$ e ψ è strettamente crescente, si ha $0 \le \psi^{-1}(|y|) < x \le B$, per cui $0 < \psi^{-1}(|y|) + s < \varepsilon/2 + \varepsilon < A$. Dunque, per mostrare il punto (1), ci resta da dimostrare che $|y + t| < \psi\big(\psi^{-1}(|y|) + s\big)$. Notiamo che ψ soddisfa le ipotesi del Lemma 3.3.6, da cui

$$\psi\big(\psi^{-1}(|y|) + s\big) \ge |y| + \psi(s) \ge |y| + s^p/C,$$

dove la prima disuguaglianza è data dal lemma e la seconda è vera per ipotesi. Allora si ha che

$$|y + t| \le |y| + |t| < |y| + Mh\alpha s^p < |y| + s^p/C \le \psi\big(\psi^{-1}(|y|) + s\big),$$

come voluto.

Per ogni $x + iy \in \mathcal{R}$ con $x \le B$ si ha $\psi^{-1}(|y|) + o > B \ge x$ per come è stato scelto B, e questo dimostra il punto (2).

Definiamo $K := \big\{z \in \mathbb{C} \mid o \le \mathfrak{Re} z \le A \text{ e } |\mathfrak{Im} z| \le \psi\big(\mathfrak{Re}(z) - o\big)\big\}$. Per ogni $x + iy \in \mathcal{R}$ con $x \le B$ si ha

$$o \le o + \psi^{-1}(|y|) < o + x \le o + B < 2o < A.$$

Inoltre $|y| = \psi\Big(\big(\psi^{-1}(|y|) + o\big) - o\Big)$, per cui $o + \big(\psi^{-1}(|y|) + iy\big) \in K$. Per costruzione, K è un compatto che soddisfa le condizioni richieste, per cui abbiamo mostrato il punto (3).

Infine, per ogni $x + iy \in \mathcal{R}$ con $x \le B$ si ha che $\psi^{-1}(|y|) + iy \in \partial\mathcal{R}$, per cui $\delta_{\mathcal{R}}(x + iy) \le \big|\big(\psi^{-1}(|y|) + iy\big) - (x + iy)\big| = |\psi^{-1}(|y|) - x|$; questo dimostra il punto (4). $\square$

Il prossimo risultato, che è sostanzialmente una versione parametrizzata del precedente, tratta dell'immersione del dominio modello $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$ in un dominio Caltrop con una punta. Per brevità, scriveremo $(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n) \in \mathbb{C}^n$ come (z', z_n).

Lemma 3.3.8. *Siano $A > 0$ e $\psi : [0, A] \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua di classe C^2 su $(0, A)$, e sia $p \in (1, 2)$. Supponiamo inoltre che:*

- *esiste una costante $C > 1$ tale che $x^p/C \le \psi(x) \le Cx^p$ per ogni $x \in [0, A]$;*
- *ψ è strettamente crescente;*
- *ψ' è strettamente crescente su $(0, A)$.*

Sia

$$D := \{z \in \mathbb{C}^n \mid 0 < \mathfrak{Re} z_n < A \text{ e } (\mathfrak{Im} z_n)^2 + \|z'\|^2 < \big(\psi(\mathfrak{Re} z_n)\big)^2\}.$$

Sia $w' \in \mathbb{C}^{n-1}$ *e poniamo*

$$\mathcal{R}_{w'} := \pi_n \left[\big((w',0) + \{0'\} \times \mathbb{C}\big) \cap D\right],$$

dove π_n *è la proiezione sull'ultima coordinata. Sia* $\alpha = 1/(p-1)$. *Allora esistono delle costanti* $a, h, B > 0$ *e un compatto* $K \subseteq \{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n \leq A\}$, *che interseca* $\{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n = A\}$ *e tale che* $K \setminus \{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n = A\} \subsetneq D$, *tali che per ogni* $w' \in \mathbb{C}^{n-1}$ *con* $\|w'\| < \psi(B/2)$ *e ogni* $\zeta \in \mathcal{R}_{w'}$ *con* $\mathfrak{Re}\zeta \leq B$ *si ha che:*

(1) $\Big(\psi^{-1}\big(S(\zeta,w')\big) + i\mathfrak{Im}\zeta\Big) + \mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \subseteq \mathcal{R}_{w'}$;

(2) $\psi^{-1}\big(S(\zeta,w')\big) + o > \mathfrak{Re}\zeta$;

(3) $\Big(\psi^{-1}\big(S(\zeta,w')\big) + i\mathfrak{Im}\zeta\Big) + o \in \pi_n \left[\big((w',0) + \{0_{n-1}\} \times \mathbb{C}\big) \cap K\right]$;

(4) $\delta_D\big((w',\zeta)\big) \leq \left|\mathfrak{Re}\zeta - \psi^{-1}\big(S(\zeta,w')\big)\right|$,

dove $S(\zeta,w') = \sqrt{(\mathfrak{Im}\zeta)^2 + \|w'\|^2}$.

Dimostrazione. Notiamo che

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{w'} &= \{\zeta \mid (w',\zeta) \in D\} \\
&= \{\zeta \mid 0 < \mathfrak{Re}\zeta < A \text{ e } (\mathfrak{Im}\zeta)^2 + \|w'\|^2 < \big(\psi(\mathfrak{Re}\zeta)\big)^2\} \\
&= \{\zeta \mid \psi^{-1}(\|w'\|) < \mathfrak{Re}\zeta < A \text{ e } (\mathfrak{Im}\zeta)^2 + \|w'\|^2 < \big(\psi(\mathfrak{Re}\zeta)\big)^2\},
\end{aligned}$$

per cui $\mathcal{R}_{w'} \neq \varnothing$ se e solo se $\|w'\| < \psi(A)$; poiché la costante B sarà scelta in $(0,A)$, nel nostro caso $\mathcal{R}_{w'}$ sarà sempre non vuoto. Notiamo inoltre che l'insieme $\mathcal{R}_{0'}$ coincide con l'insieme $\mathcal{R}$ del Lemma 3.3.7. Prendiamo dunque a, h e B date da tale lemma. Scriviamo per semplicità $c = 1/C$, e osserviamo che dalla dimostrazione del Lemma 3.3.7 discendono le seguenti disuguaglianze:

$$B + s < 3A/4 < A \text{ e } |t| < cs^p \text{ per ogni } s + it \in \mathcal{Q}^{\alpha,a,h}; \tag{30}$$

$$o > B. \tag{31}$$

Supponiamo ora che $w' \neq 0'$. Sia $\zeta \in \mathcal{R}_{w'}$ tale che $\mathfrak{Re}\zeta \leq B$. Un elemento arbitrario dell'insieme $\Big(\psi^{-1}\big(S(\zeta,w')\big) + i\mathfrak{Im}\zeta\Big) + \mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$ è della forma $\Big(\psi^{-1}\big(S(\zeta,w')\big) + s\Big) + i(\mathfrak{Im}\zeta + t)$ con $s + it \in \mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$. Un tale punto appartiene a $\mathcal{R}_{w'}$ se e solo se:

(i) si ha $\psi^{-1}\big(S(\zeta,w')\big) + s < A$;

(ii) si ha $\|w'\|^2 + (\mathfrak{Im} w + t)^2 < \bigg(\psi\Big(\psi^{-1}\big(S(\zeta,w') + s\big)\Big)\bigg)^2$.

Poiché $\zeta \in \mathcal{R}_{w'}$ e $\mathfrak{Re}\zeta \leq B$, abbiamo che

$$(\mathfrak{Im}\zeta)^2 + \|w'\|^2 < \big(\psi(\mathfrak{Re}\zeta)\big)^2 < \big(\psi(B)\big)^2;$$

quindi $\psi^{-1}\big(S(\zeta, w')\big) + s < B + s < A$, dove l'ultima disuguaglianza è la prima in (30). È così verificata la condizione (i). Vediamo ora la condizione (ii). Per il Lemma 3.3.6 e per le ipotesi su ψ si ha che

$$\psi\Big(\psi^{-1}\big(S(\zeta, w') + s\big)\Big) \geq S(\zeta, w') + \psi(s) \geq S(\zeta, w') + cs^p;$$

dunque

$$\bigg(\psi\Big(\psi^{-1}\big(S(\zeta, w') + s\big)\Big)\bigg)^2 - (\mathfrak{Im}\zeta)^2 - \|w'\|^2 \geq 2cs^p S(\zeta, w') + c^2 s^{2p}.$$

Allora la condizione (ii) segue se mostriamo che

$$2t\mathfrak{Im}\zeta + t^2 < 2cs^p S(\zeta, w') + c^2 s^{2p},$$

ma quest'ultima disuguaglianza segue dalla seconda disuguaglianza in (30). Abbiamo così dimostrato il punto (1).

Adesso notiamo che

$$\psi^{-1}\big(S(\zeta, w')\big) + o \geq \psi^{-1}(\mathfrak{Im}\zeta) + o > B \geq \mathfrak{Re}\zeta,$$

dove la seconda disuguaglianza segue da (31); questo dimostra il punto (2).

Poniamo $K := \{(w', \zeta) \in \mathbb{C}^n \mid o \leq \mathfrak{Re}\zeta \leq A \text{ e } S(\zeta, w') \leq \psi(\mathfrak{Re}\zeta - o)\}$. Si verifica facilmente che K è un compatto con le proprietà richieste. Sia $\zeta \in \mathcal{R}_{w'}$ tale che $\mathfrak{Re}\zeta \leq B$ e poniamo $\eta := \Big(\psi^{-1}\big(S(\zeta, w')\big) + i\mathfrak{Im}\zeta\Big) + o$; allora abbiamo che

$$o \leq \psi^{-1}(\|w'\|) + o \leq \mathfrak{Re}\eta < \mathfrak{Re}\zeta + o \leq B + o < A.$$

Inoltre, si ha che $S(\eta, w') = S(\zeta, w') = \psi(\mathfrak{Re}\eta - o)$; quindi

$$\eta \in \pi_n \left[\big((w', 0) + \{0'\} \times \mathbb{C}\big) \cap K\right],$$

e questo dimostra il punto (3).

Per il punto (4), se (w', ζ) è preso come sopra, allora

$$\psi^{-1}\big(S(\zeta, w')\big) + i\mathfrak{Im}\zeta \in \partial\mathcal{R}_{w'};$$

dunque

$$\delta_D\big((w', \zeta)\big) \leq \delta_{\mathcal{R}_{w'}}(\zeta) \leq \left|\mathfrak{Re}\zeta - \psi^{-1}\big(S(\zeta, w')\big)\right|,$$

come voluto. □

Ci serviranno anche i seguenti risultati.

Lemma 3.3.9. *Siano $A > 0$, $p > 1$ e $\psi : [0, A] \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione tale che:*

- *è di classe C^1 su $(0, A)$;*
- *esiste $C > 1$ tale che per ogni $x \in [0, A]$ si ha $\psi(x) \leq Cx^p$;*
- *ψ' è crescente su $(0, A)$.*

Allora ψ è derivabile in 0 e ψ' è continua su $[0, A)$, per cui $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \psi'(x) = 0$.

Dimostrazione. Che $\psi'(0)$ esista e sia uguale a 0 segue immediatamente dalla stima su $\psi(x)$. Dunque ψ' si estende a una funzione su $[0, A)$. Poiché ψ' è monotona crescente, esiste $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \psi'(x) = l < +\infty$. Segue allora da risultati elementari di analisi in una variabile che $l = 0$. □

Lemma 3.3.10. *(Conseguenza della dimostrazione di [Si, Proposition 6]) Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio e $p \in \Omega$. Supponiamo che esista una funzione u plurisubarmonica, negativa, di classe C^2 in un intorno di p e tale che esiste $c > 0$ per cui si ha*

$$L_u(p; v) \geq c\|v\|^2$$

per ogni $v \in \mathbb{C}^n$. Allora esiste una costante $\alpha > 0$ tale che

$$K_\Omega(p; v) \geq \left(\frac{c}{\alpha}\right)^{1/2} \frac{\|v\|}{|u(p)|^{1/2}}$$

per ogni $v \in \mathbb{C}^n$.

Lemma 3.3.11. *(Conseguenza di [M, Theorem B]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ con $n \geq 2$ un dominio limitato. Sia $\mathcal{M}_0$ un insieme aperto in $\partial\Omega$ che sia anche un'ipersuperficie di classe C^2. Assumiamo che $\mathcal{M}_0$ ammetta una funzione di definizione ϕ di classe C^2 in un qualche aperto contenente $\mathcal{M}_0$, e tale che esista una costante $\delta > 0$ per cui $L_\phi(\xi; v) \geq \delta\|v\|^2$ per ogni $\xi \in \mathcal{M}_0$ e $v \in \mathbb{C}^n$. Sia $\mathcal{M}_1 \subsetneq \mathcal{M}_0$ un sottoinsieme compatto. Allora esistono un intorno di $\mathcal{M}_1$ in $\overline{\Omega}$, sia esso $\mathcal{V}$, e due costanti $C, c > 0$ tali che $K_\Omega(z; v) \geq \left(1 - C\delta_\Omega(z)^{1/2}\right)\frac{c\|v\|}{\delta_\Omega(z)^{1/2}}$ per ogni $z \in \mathcal{V} \cap \Omega$ e $v \in \mathbb{C}^n$.*

Siamo ora pronti a dimostrare quello che volevamo.

Teorema 3.3.12. *([BM, Theorem 1.4]) Sia Ω un dominio Caltrop; allora Ω è (λ, κ)-visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$, ma non è un dominio Goldilocks.*

Dimostrazione. Fissiamo la seguente notazione: date due funzioni non negative F e G che dipendono da alcuni parametri, scriviamo $G \lesssim F$ per dire che esiste una costante $C > 0$, indipendente dai parametri, tale che $G \leq C \cdot F$. Scriviamo $G \approx F$ per intendere $G \lesssim F$ e $F \lesssim G$.

Passo 1: una stima dal basso per $K_\Omega(w; \cdot)$ per w contenuto in una punta.

Siano $\{q_1, \ldots, q_N\} \subseteq \partial\Omega$ i punti della Definizione 3.3.1, e fissiamo q_{j^*} uno di tali punti. Siano $p_{j^*} \in (1, 3/2)$ l'esponente, $\mathbb{U}^{(j^*)}$ la trasformazione unitaria e $\psi_{j^*} : [0, A_{j^*}] \longrightarrow [0, +\infty)$ la funzione associati a q_{j^*} nella Definizione 3.3.1. Per la Proposizione 1.1.11 abbiamo che K_Ω è invariante per biolomorfismi, e $\mathbb{U}_{j^*}$ è un biolomorfismo con differenziale $\mathbb{U}^{(j^*)}$ che preserva la norma euclidea; allora possiamo assumere senza perdita di generalità $\mathbb{U}_{j^*} = \mathrm{id}$ e $q_{j^*} = 0$, per cui, ponendo $A = A_{j^*}$ e $\psi = \psi_{j^*}$, si ha che

$$\Omega \cap V_{j^*} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid 0 < \mathfrak{Re} z_n < A \text{ e } (\mathfrak{Im} z_n)^2 + \|z'\|^2 < \big(\psi(\mathfrak{Re} z_n)\big)^2 \right\}.$$

Poniamo $\rho(z) := (\mathfrak{Im} z_n)^2 + \|z'\|^2 - \big(\psi(\mathfrak{Re} z_n)\big)^2$ per $z \in \Omega \cap V_{j^*}$. Calcolando le derivate parziali seconde in modo analogo a come fatto nella costruzione dell'esempio a una punta, ricordando le proprietà di ψ e applicando il Lemma 3.3.9, troviamo che esiste una costante $A' \in (0, A]$ tale che

$$L_\rho(z; v) \geq \|v'\|^2 + |v_n|^2/4$$

per ogni $z \in \Omega \cap V_{j^*}$ con $0 < \mathfrak{Re} z_n < A'$ e $v \in \mathbb{C}^n$.

Siano $U^{(\nu)}$, per $\nu = 1, 2, 3, 4$, degli intorni aperti e connessi di 0 tali che:

- si ha $U^{(1)} \subset\subset U^{(2)} \subset\subset U^{(3)} \subset\subset U^{(4)}$;
- si ha $U^{(\nu)} \cap \Omega = \{z \in \Omega \cap V_{j^*} \mid 0 < \|z\| < \nu A'/4\}$ per $\nu = 1, 2, 3, 4$.

Sia $\chi_1 : \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, 1]$ una funzione liscia con $\chi_1|_{U^{(1)}} \equiv 0$ e $\chi_1|_{\mathbb{C}^n \setminus U^{(2)}} \equiv 1$, e sia $\phi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione liscia con le seguenti proprietà:

- è convessa e non decrescente;
- è nulla in $[0, (A')^2/16]$;
- crece lentamente nell'intervallo $((A')^2/16, (A')^2/4]$;
- cresce rapidamente nell'intervallo $[9(A')^2/16, +\infty)$.

A breve specificheremo cosa intendiamo di preciso con le ultime due condizioni, ma per farlo ci serviranno altre funzioni che adesso definiamo. Poniamo $M_\phi := \sup\limits_{z \in \Omega} \phi(\|z\|^2)$ e $\Phi(z) := \phi(\|z\|^2) - M_\phi$ per ogni $z \in \Omega$. Abbiamo che Φ è plurisubarmonica per [Kr, Proposition 2.2.6]. Si ha allora che

$$\begin{aligned}
L_{\rho + \chi_1 \Phi}(z; v) &= L_\rho(z; v) + \chi_1(z) L_\Phi(z; v) \\
&\qquad + 2\mathfrak{Re} \left(\sum_{j,k=1}^n \partial_{z_j} \chi_1(z) \partial_{\bar{z}_k} \Phi(z) v_j \bar{v}_k \right) + \Phi(z) L_{\chi_1}(z; v) \\
&\geq \|v'\|^2 + |v_n|^2/4 - 2 \sum_{j,k=1}^n |\partial_{z_j} \chi_1(z) \partial_{\bar{z}_k} \Phi(z)| |v_j| |\bar{v}_k| \\
&\qquad - |\Phi(z)| |L_{\chi_1}(z; v)|
\end{aligned}$$

per ogni $z \in (U^{(2)} \setminus U^{(1)}) \cap \Omega$ e $v \in \mathbb{C}^n$. Specifichiamo adesso la prima condizione di crescita di ϕ. Sull'intervallo $((A')^2/16, (A')^2/4]$ deve crescere così lentamente che

$$L_{\rho + \chi_1 \Phi}(z; v) \geq \|v'\|^2/2 + |v_n|^2/8$$

per ogni $z \in (U^{(2)} \setminus U^{(1)}) \cap \Omega$ e $v \in \mathbb{C}^n$.

Sia adesso $\chi_2 : \mathbb{C}^n \longrightarrow [0,1]$ una funzione liscia e a supporto compatto tale che $\chi_2|_{U^{(3)}} \equiv 1$ e $\chi_2|_{\mathbb{C}^n \setminus U^{(4)}} \equiv 0$, e chiediamo che il supporto di χ_2 intersecato con Ω sia contenuto in $\{z \in \Omega \mid \|z\| < 7A'/8\}$. Abbiamo allora che

$$\begin{aligned} L_{\chi_2\rho+\Phi}(z;v) \geq{}& \phi'(\|z\|^2)\|v\|^2 + \phi''(\|z\|^2)|\langle z,v\rangle|^2 \\ & - 2\sum_{j,k=1}^{n} |\partial_{z_j}\chi_2(z)\partial_{\bar{z}_k}\rho(z)||v_j||\bar{v}_k| - |\rho(z)||L_{\chi_2}(z;v)| \end{aligned}$$

per ogni $z \in (U^{(4)} \setminus U^{(3)}) \cap \Omega$ e $v \in \mathbb{C}^n$. Specifichiamo adesso la seconda condizione di crescita di ϕ. Sull'intervallo $[9(A')^2/16, +\infty)$ deve crescere così rapidamente che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$L_{\chi_2\rho+\Phi}(z;v) \geq c\|v\|^2$$

per ogni $z \in (U^{(4)} \setminus U^{(3)}) \cap \Omega$ e $v \in \mathbb{C}^n$.

Poniamo ora $u(z) := \chi_1(z)\Phi(z) + \chi_2(z)\rho(z)$. Ricordiamo che Φ è plurisubarmonica; allora:

- per il principio del massimo ([Kr, Corollary 2.1.5], segue facilmente dalla Definizione 1.2.30 che vale anche per funzioni plurisubarmoniche) applicato a Φ, e per le definizioni di χ_1,χ_2 e ρ, abbiamo che $u < 0$ su Ω;
- dalle disuguaglianze sulla forma di Levi che seguono dalle condizioni imposte su ϕ, e dalle definizioni di χ_1 e χ_2, segue per [H, Theorem 2.6.2] che u è plurisubarmonica su Ω.

Per la simmetria di rotazione della punta $\Omega \cap V_{j^*}$, per ogni $w \in \Omega \cap V_{j^*}$ con $\mathfrak{Re}w_n$ sufficientemente piccolo si ha che $\delta_\Omega(w) = \mathrm{dist}\big(\mathfrak{Re}w_n + iS(w), \mathrm{graph}(\psi)\big)$, dove con graph$(\psi)$ s'intende il grafico di ψ e $S(w) = \sqrt{(\mathfrak{Im}w_n)^2 + \|w'\|^2}$. Segue dunque, da semplici stime geometriche e dal Lemma 3.3.9, ponendo $\xi_n^w = \pi_n(\xi^w)$, che

$$\frac{\delta_\Omega(w)}{\psi(\mathfrak{Re}w_n) - S(w)} = \frac{\big|(\mathfrak{Re}\xi_n^w - \mathfrak{Re}w_n) + i\big(\psi(\mathfrak{Re}\xi_n^w) - S(w)\big)\big|}{\psi(\mathfrak{Re}w_n) - S(w)} \longrightarrow 1 \tag{32}$$

per $\mathfrak{Re}w_n \longrightarrow 0$. Allora esiste una costante $A'' > 0$ tale che:

$$\{z \in \Omega \cap V_{j^*} \mid 0 < \mathfrak{Re}z_n < A''\} \subseteq \Omega \cap U^{(1)}; \tag{33}$$

$$\psi(x) \in (0,1) \text{ per ogni } x \in (0, A''); \tag{34}$$

$$\frac{\delta_\Omega(w)}{\psi(\mathfrak{Re}w_n) - S(w)} > 1/2 \tag{35}$$

per ogni $w \in \Omega \cap V_{j^*}$ tale che $\mathfrak{Re}w_n \in (0, A'')$.

Fissiamo ora un punto $w \in \Omega \cap V_{j^*}$ tale che $0 < \mathfrak{Re} w_n < A''$; allora esiste una costante $b > 0$ tale che

$$
\begin{aligned}
K_\Omega(w;v) &\geq b\frac{\|v\|}{|u(w)|^{1/2}} \\
&= b\frac{\|v\|}{\big(\psi(\mathfrak{Re} w_n) - S(w)\big)^{1/2}\big(\psi(\mathfrak{Re} w_n) + S(w)\big)^{1/2}} \qquad (36) \\
&\geq \frac{b}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\|v\|}{\big(\psi(\mathfrak{Re} w_n) - S(w)\big)^{1/2}} \geq \frac{b}{2} \cdot \frac{\|v\|}{\delta_\Omega(w)^{1/2}},
\end{aligned}
$$

dove la prima disuguaglianza segue dal Lemma 3.3.10, l'uguaglianza segue da (33) e dalle definizioni di χ_1 e χ_2, e la penultima e ultima disuguaglianza seguono, rispettivamente, da (34) e da (35).

Passo 2: una stima dall'alto per M_Ω.

Dato che le stime fatte al passo 1 valgono per un qualsiasi q_{j^*}, che sono in numero finito, ne deduciamo che esistono delle costanti $\beta, A''_1, \ldots, A''_N > 0$ tali che

$$K_\Omega(w;v) \geq \beta\frac{\|v\|}{\delta_\Omega(w)^{1/2}} \qquad (37)$$

per ogni $w \in \Omega \cap \mathbb{U}_j^{-1}(\{z \;|\in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n < A''_j\})$, per ogni $v \in \mathbb{C}^n$ e per $j = 1, \ldots, N$. Adesso poniamo

$$\mathcal{M}_0 := \partial\Omega \cap \bigcap_{j=1}^{N} \mathbb{U}_j^{-1}(\{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n > A''_j/2\}),$$

$$\mathcal{M}_1 := \partial\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{N} \mathbb{U}_j^{-1}(\{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n < A''_j\}).$$

Dalla Definizione 3.3.1, in ogni punto di $\partial\Omega\setminus\{q_1, \ldots, q_N\}$ esiste una funzione di definizione locale. Poiché $\mathcal{M}_0$ è relativamente compatto in $\partial\Omega$, usando delle partizioni dell'unità possiamo incollare tra loro un numero finito di tali funzioni per ottenere una funzione di definzione per $\mathcal{M}_0$; siccome possiamo sempre farlo in modo che vicino a un punto specifico sia uguale alla funzione di definizione locale per $\partial\Omega \setminus \{q_1, \ldots, q_N\}$, e dato che la stretta pseudoconvessità in un punto è indipendente dalla funzione di definizione scelta ([Kr, Section 3.2]), usando anche [Kr, Proposition 3.2.1] si trova che $\mathcal{M}_0$ soddisfa le ipotesi del Lemma 3.3.11.

Dunque esistono un intorno $\mathcal{V}$ di $\mathcal{M}_1$ in $\overline{\Omega}$ e una costante $\beta' > 0$ tali che

$$K_\Omega(w;v) \geq \beta'\frac{\|v\|}{\delta_\Omega(w)^{1/2}} \qquad (38)$$

per ogni $w \in \mathcal{V} \cap \Omega$ e $v \in \mathbb{C}^n$. Consideriamo adesso l'insieme

$$\Omega \setminus \left(\mathcal{V} \cup \bigcup_{j=1}^{N} \mathbb{U}_j^{-1}(\{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n < A''_j\})\right),$$

che è compatto per definizione; allora la pseudometrica di Kobayashi ha un minimo positivo su tale insieme. Per la (37) e la (38), segue che

$$\frac{1}{K_\Omega(w;v)} \lesssim \delta_\Omega(w)^{1/2}$$

per ogni $w \in \Omega$ e per ogni $v \in \mathbb{C}^n$ con $\|v\| = 1$. In particolare, $M_\Omega(r) \lesssim r^{1/2}$.

Passo 3: il comportamento di k_Ω.

Fissiamo inizialmente un punto q_j, e siano a_j, h_j e B_j le costanti date dal Lemma 3.3.8 con $\psi = \psi_j$. Per semplicità di notazione poniamo $a = a_j$ e $h = h_j$. Consideriamo un punto $w \in \Omega \cap \mathbb{U}_j^{-1}(\{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n < B_j/2\})$ e scriviamo $\mathbb{U}_j(w) = (\omega', \omega_n)$. Sia $\Psi_{j,w} : \mathcal{Q}^{\alpha,a,h} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ la funzione olomorfa data da

$$\psi_{j,w}(\zeta) := \mathbb{U}_j^{-1}\Big(\omega', \psi_j^{-1}\big(S(\omega)\big) + i\mathfrak{Im}\omega_n + \zeta\Big),$$

con $\alpha = 1/(p_j - 1)$ e $S(\omega) = \sqrt{(\mathfrak{Im}\omega_n)^2 + \|\omega'\|^2}$. Notiamo che questa mappa è un'immersione affine di $\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}$ in $\mathbb{C}^n$. Vogliamo vedere che è un'immersione a valori in Ω, per potervi ottenere la stime per k_Ω.

Notiamo che $\mathfrak{Re}\omega_n < B_j/2$; allora, per come è stato preso w e per la Definizione 3.3.1, si ha $\|\omega'\| < \psi_j(B_j/2)$. Segue quindi dai punti (1) e (2) del Lemma 3.3.8 che:

(i) si ha

$$\begin{aligned}\{\omega'\} \times \Big(\psi_j^{-1}\big(S(\omega)\big) + i\mathfrak{Im}\omega_n + \mathcal{Q}^{\alpha,a,h}\Big)\\ \subseteq \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n \in (0, A_j) \text{ e } (\mathfrak{Im} z_n)^2 + \|z'\|^2 < \psi_j(\mathfrak{Re} z_n)^2\};\end{aligned}$$

(ii) si ha $\mathfrak{Re}\omega_n \in \Big(\psi_j^{-1}\big(S(\omega)\big), \psi_j^{-1}\big(S(\omega)\big) + o\Big)$.

Adesso poniamo $K_j := \mathbb{U}_j^{-1}(K)$ e $z_w := \Psi_{j,w}(o)$, dove K è il compatto dato dal Lemma 3.3.8. Allora segue, dalla parte (3) del lemma, che

$$z_w \in K_j \tag{39}$$

per ogni $w \in \Omega \cap V_j$ tale che $0 < \mathfrak{Re}\omega_n < B_j/2$.

Dal punto (i) sopra segue che $\Psi_{j,w}(\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}) \subseteq \Omega$. Per definizione abbiamo che $\Psi_{j,w}\Big(- \psi_j^{-1}\big(S(\omega)\big) + \mathfrak{Re}\omega_n\Big) = w$. Allora, per la Proposizione 1.1.15, si ha $k_\Omega(z_w, w) \leq k_{\mathcal{Q}^{\alpha,a,h}}\Big(o, -\psi_j^{-1}\big(S(\omega)\big) + \mathfrak{Re}\omega_n\Big)$. Dal punto (ii) e dalla Proposizione 3.3.5 con $x_0 = o$ troviamo che esiste una costante $C^{(j)} > 0$ tale che $k_\Omega(z_w, w) \leq C^{(j)} + \frac{\pi}{4h}\left|\mathfrak{Re}\omega_n - \psi_j^{-1}\big(S(\omega)\big)\right|^{-(p_j-1)}$. Dato che $\mathbb{U}_j$ preserva le distanze euclidee, quest'ultima disuguaglianza insieme al punto (4) del Lemma 3.3.8 ci dicono che

$$k_\Omega(z_w, w) \leq C^{(j)} + \frac{\pi}{4h}\delta_\Omega(w)^{-(p_j-1)} \tag{40}$$

per ogni $w \in \Omega \cap V_j$ tale che $0 < \mathfrak{Re}\omega_n < B_j/2$. Siccome il punto q_j è stato scelto arbitrariamente, la (39) e la (40) valgono per ogni $j = 1, \dots, N$.

Dato che $\partial\Omega$ è di classe C^2 all'infuori dei punti $q_1, \dots, q_N$ e Ω è limitato, esistono un compatto $K_0 \subseteq \Omega$ e una costante $R > 0$ tali che per ogni punto

$$w \in \Omega \setminus \left(K_0 \cup \bigcup_{j=1}^{N} \mathbb{U}_j^{-1}(\{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n < B_j/2\}) \right) \tag{41}$$

esiste un punto

$$\xi^w \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{N} \mathbb{U}_j^{-1}(\{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re} z_n < B_j/4\})$$

tale che, detto η^w il vettore unitario normale a $\partial\Omega$ entrante in ξ^w, allora:

- si ha $\xi^w + D(R;R)\eta^w \subseteq \Omega$;
- si ha che w appartiene al segmento congiungente ξ^w a $\xi^w + R\eta^w =: z^w$;
- si ha $z^w \in K_0$.

Per trovare K_0 e R, basta considerare un intorno tubolare dato [Sp, Chapter 9, Theorem 20]. Chiediamo anche che $\delta_\Omega(w) < 1$ per ogni $w \notin K_0$. Per ogni tale w esiste un unico numero $t(w) \in (0, R)$ tale che $\xi^w + t(w)\eta^w = w$. Da ciò, e dalla Proposizione 1.1.15, segue che

$$\begin{aligned} k_\Omega(z^w, w) &\leq k_{D(R;R)}\big(0, 1 - t(w)\big) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2 - t(w)/R}{t(w)/R}\right) \\ &\leq \log\sqrt{2R} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\|\xi^w - w\|}\right) \leq \log\sqrt{2R} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\delta_\Omega(w)}\right) \end{aligned} \tag{42}$$

per ogni w che soddisfa la (41). Fissiamo ora un punto $z_0 \in \Omega$ e poniamo

$$K^* := K_0 \cup K_1 \cup \dots \cup K_N$$

e

$$C_0 := \sup_{x \in K^*} k_\Omega(z_0, x) + \max\{\log\sqrt{2R}, C^{(1)}, \dots, C^{(N)}\};$$

allora, dalla disuguaglianza triangolare per k_Ω, dalla (39) e dalle disuguaglianze (40) e (42), troviamo che esiste una costante $C_1 > 0$ tale che

$$k_\Omega(z_0, z) \leq C_0 + C_1 \delta_\Omega(z)^{-\max_{j=1,\dots,N} p_j + 1}$$

per ogni $z \in \Omega$.

Passo 4: Ω è (λ, κ)-visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

Poniamo $p_0 := \max\limits_{j=1,\dots,N} p_j$; abbiamo $p_0 \in (1, 3/2)$ per ipotesi. Per mostrare la tesi di questo passaggio, ci basterà verificare le ipotesi del Teorema 3.1.3. Prendendo $S = \varnothing$, $U = \mathbb{C}^n$, z_0 il punto scelto alla fine del passo 3 e

$f(r) = C_0 + C_1 r^{p_0 - 1}$, e usando i passaggi 2 e 3 dimostrati sopra, la verifica è immediata. In questo passaggio abbiamo usato la condizione $p_0 < 3/2$, cioè $1/2 - p_0 > -1$, per ottenere l'ipotesi (3) del Teorema 3.1.3.

Passo 5: Ω non è un dominio Goldilocks.

Vogliamo mostrare che la condizione (2) nella Definizione 3.1.1 non è soddisfatta da Ω. Per farlo, fissiamo un punto q_{j^*}; come fatto al passo 1, ci restringiamo a $\Omega \cap V_{j^*}$. Riprendendo la notazione di quel passaggio, prendiamo $A = A_{j^*}$, $A'' = A''_{j^*}$, $\psi = \psi_{j^*}$, $q_{j^*} = 0$ e $p = p_{j^*}$. Sia $z_0 = (0, \dots, 0, A''/2)$; mostriamo che per ogni $z \in \Omega \cap V_{j^*}$ tale che $0 < \mathfrak{Re} z_n < A''/2$ si ha

$$k_\Omega(z_0, z) \gtrsim (\mathfrak{Re} z_n)^{-(p-1)} - (A''/2)^{-(p-1)}. \tag{43}$$

Fissiamo uno z che soddisfa le suddette condizioni. Sia $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega$ una curva C^1 a tratti tale che $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$ e $\gamma([0,1]) \subseteq \Omega \cap V_{j^*}$. Detta γ_n l'ultima coordinata di γ, per continuità di $\mathfrak{Re}\gamma_n$ troviamo che esistono $\alpha, \beta \in [0,1]$ tali che $(\mathfrak{Re}\gamma_n)([\alpha,\beta]) = [\mathfrak{Re} z_n, A''/2]$. Quindi

$$\int_0^1 K_\Omega\big(\gamma(t); \gamma'(t)\big)\, \mathrm{d}t \geq \int_\alpha^\beta K_\Omega\big(\gamma(t); \gamma'(t)\big)\, \mathrm{d}t \geq \int_\alpha^\beta \frac{b\|\gamma'(t)\|}{\big|u\big(\gamma(t)\big)\big|^{1/2}}\, \mathrm{d}t,$$

dove la seconda disuguaglianza segue dalla (36). Per ogni $w \in \Omega \cap V_{j^*}$ con $0 < \mathfrak{Re} w_n < A''$ si ha

$$|u(w)| = \big(\psi(\mathfrak{Re} w_n)\big)^2 - \|w'\|^2 - (\mathfrak{Im} w_n)^2 \leq \big(\psi(\mathfrak{Re} w_n)\big)^2 \leq C^2 (\mathfrak{Re} w_n)^{2p},$$

dove abbiamo preso $C = C_{j^*}$. Combinando con la disuguaglianza precedente, troviamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 K_\Omega\big(\gamma(t); \gamma'(t)\big)\, \mathrm{d}t &\geq \frac{b}{C} \int_\alpha^\beta \frac{|(\mathfrak{Re}\gamma_n)'(t)|}{\big((\mathfrak{Re}\gamma_n)(t)\big)^p}\, \mathrm{d}t \\ &\geq \left| \frac{b}{C} \int_\alpha^\beta \frac{(\mathfrak{Re}\gamma_n)'(t)}{\big((\mathfrak{Re}\gamma_n)(t)\big)^p}\, \mathrm{d}t \right| = \frac{b}{C} \int_{\mathfrak{Re} z_n}^{A''/2} \frac{1}{t^p}\, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

dove il cambio di variabile nell'ultimo passaggio non è propriamente consentito ($\mathfrak{Re}\gamma_n$ potrebbe non essere monotona su $[\alpha,\beta]$), ma possiamo farlo su un numero finito di intervalli dove è monotona e la cui immagine partiziona $[\mathfrak{Re} z_n, A''/2]$, mentre i pezzi rimanenti possiamo assorbirli nella precedente disuguaglianza. La disuguaglianza (43) segue applicando il Teorema 1.2.10.

Poniamo adesso $\mu^x := (0, \dots, 0, x)$ per $0 < x < A''/2$. Per la (43) si ha che

$$k_\Omega(z_0, \mu^x) \gtrsim x^{-(p-1)} - (A''/2)^{-(p-1)}.$$

Dalla (32) segue che $\delta_\Omega(\mu^x) \approx x^p$ per $x \in (0, A''/2)$. Dunque, combinando con la disuguaglianza precedente, troviamo

$$k_\Omega(z_0, \mu^x) \gtrsim \delta_\Omega(\mu^x)^{-1+1/p} - B$$

per una costante B opportuna. Dato che abbiamo $p = p_{j^*} > 1$, otteniamo che $\dfrac{\delta_\Omega(\mu^x)^{-1+1/p}}{\log\left(\frac{1}{\delta_\Omega(\mu^x)}\right)} \longrightarrow +\infty$ per $\mu^x \longrightarrow 0 = q_{j^*}$. Quindi $k_\Omega(z_0, \mu^x)$ non può soddisfare la condizione (2) nella Definizione 3.1.1, come voluto. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Vediamo ora che i domini Caltrop sono taut. Ci servirà il seguente risultato.

Lemma 3.3.13. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio limitato tale che esiste (e quindi per ogni) uno $z_0 \in \Omega$ tale che per ogni $\xi \in \partial\Omega$ si ha $\lim\limits_{w \longrightarrow \xi} k_\Omega(z_0, w) = +\infty$; allora (Ω, k_Ω) è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ una successione di Cauchy; è sufficiente mostrare che ammette una sottosuccessione convergente. Per limitatezza di Ω, ammette una sottosuccessione $\{w_{\nu_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a $\xi \in \overline{\Omega}$. Supponiamo per assurdo che $\xi \in \partial\Omega$; allora $\lim\limits_{j\longrightarrow+\infty} k_\Omega(z_0, w_{\nu_j}) = +\infty$, ma questo, per la disuguaglianza triangolare, è in contraddizione con il fatto che la successione sia di Cauchy. $\square$

Teorema 3.3.14. *([BM, Theorem 8.2]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio Caltrop. Allora (Ω, k_Ω) è completo; in particolare, per la Proposizione 1.2.26, è taut.*

Dimostrazione. Adottiamo la notazione della dimostrazione del Teorema 3.3.12, della quale possiamo usare tutti i risultati intermedi, visto che siamo nelle stesse ipotesi. Fissiamo $z_0 \in \Omega$ e $\xi \in \partial\Omega$.

Consideriamo prima il caso $\xi \in \partial\Omega \setminus \{q_1, \ldots, q_N\}$. Prendiamo un punto $\eta \in \partial\Omega \setminus (\{q_1, \ldots, q_N, \xi\})$. Per ipotesi, Ω è strettamente pseudoconvesso in ξ e η. Prendiamo due aperti V_ξ e V_η di $\mathbb{C}^n$, intorni rispettivamente di ξ e η, e una costante $C > 0$ dati da [FR, Corollary 2.4]. Sia $b_\eta \in \Omega \cap V_\eta$. Consideriamo una successione $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ tale che $w_\nu \longrightarrow \xi$ per $\nu \longrightarrow +\infty$; possiamo assumere $w_\nu \in \Omega \cap V_\xi$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$. Allora [FR, Corollary 2.4] ci dice che

$$\begin{aligned} k_\Omega(z_0, w_\nu) &\geq k_\Omega(w_\nu, b_\eta) - k_\Omega(b_\eta, z_0) \\ &\geq \frac{1}{2}\log\frac{1}{\delta_\Omega(w_\nu)} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\delta_\Omega(b_\eta)} - k_\Omega(b_\eta, z_0) - C, \end{aligned}$$

e quest'ultima quantità tende a $+\infty$ per ν che tende a $+\infty$.

Adesso vogliamo mostrare la stessa cosa per $\xi = q_{j^*}$, dove $j^* \in \{1, \ldots, N\}$. Consideriamo una successione $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ tale che $w_\nu \longrightarrow q_{j^*}$ per $\nu \longrightarrow +\infty$; possiamo assumere $w_\nu \in \Omega \cap V_{j^*}$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$. Ricordiamo che possiamo assumere senza perdita di generalità $q_{j^*} = 0$ e $\mathbb{U}_{j^*} = \mathrm{id}$. Poniamo inoltre $w_{\nu,n} := \pi_n(w_\nu)$. Allora $\mathfrak{Re}\, w_{\nu,n} \longrightarrow 0$ per $\nu \longrightarrow +\infty$. Scrivendo z_0' al posto di z_0 nella disuguaglianza (43), si ha che

$$k_\Omega(z_0', w_\nu) \gtrsim (\mathfrak{Re}\, w_{\nu,n})^{-(p-1)} - (A''/2)^{-(p-1)},$$

e quest'ultima quantità va a $+\infty$ per $\nu \longrightarrow +\infty$; per disuguaglianza triangolare, vale anche con lo z_0 scelto nella prima parte della dimostrazione. Si conclude applicando il Lemma 3.3.13. □

Da quanto dimostrato, discende un teorema di tipo "Wolff-Denjoy".

Corollario 3.3.15. *Siano Ω un dominio Caltrop e $F : \Omega \longrightarrow \Omega$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:*

- *le orbite dei punti di Ω tramite F sono relativamente compatte in Ω; oppure,*
- *esiste un unico punto di $\partial\Omega$ tale che la successione delle iterate di F converge, uniformemente sui compatti, a quel punto.*

Dimostrazione. Da quanto visto segue che Ω soddisfa le ipotesi del Corollario 2.4.2. □

3.4 Un altro esempio

L'ultimo esempio è quello mostrato in [CMS, Section 5.2]; si tratta di un altro esempio di dominio non di tipo Goldilocks che soddisfa la condizione di visibilità.

Iniziamo considerando la funzione $\Phi_0 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\Phi_0(z) := \begin{cases} \exp(-1/\|z\|^2) - \mathfrak{Im}(z_2) & \text{se } z = (z_1, z_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Poiché la matrice hessiana di Φ_0 (vista come funzione da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}$) è la stessa della funzione $\exp(-1/\|z\|^2)$ estesa a 0 nell'origine, che è convessa vicino all'origine, esiste $0 < \varepsilon < 1$ tale che Φ_0 è convessa in $\mathbb{B}^2_{2\varepsilon}$. Scegliamo inoltre una funzione liscia $\psi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow [0,1]$ tale che $\psi \equiv 1$ in $\mathbb{B}^2_{2\varepsilon}$ e $\operatorname{supp}\psi \subseteq \mathbb{B}^2_{3\varepsilon}$. Poniamo $\Phi := \Phi_0 \cdot \psi$ e $c_0 := \sup\limits_{z\in\mathbb{C}^2} \big(-\Phi(z)\big) > 0$.

Scegliamo adesso una funzione liscia $\chi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ che sia identicamente nulla in $[0, \varepsilon^2]$, strettamente crescente in $[\varepsilon^2, +\infty)$ e strettamente convessa in $\big(\varepsilon^2, (\varepsilon + \delta)^2\big)$ per $0 < \delta < \varepsilon$; per esempio, possiamo prendere $\chi(t) = \exp\big(-1/(t - \varepsilon^2)\big)$ per $t > \varepsilon^2$ e 0 altrove. Poniamo $c_1 := \chi\big((\varepsilon + \delta/2)^2\big)$ e $C := c_0/c_1$. Definiamo

$$\Psi(z) := C\chi(\|z\|^2)$$

per ogni $z \in \mathbb{C}^2$.

Osserviamo che:

- la funzione Ψ è liscia e non negativa su tutto $\mathbb{C}^2$, nulla in $\overline{\mathbb{B}^2_\varepsilon}$, e strettamente convessa e strettamente positiva in $\mathbb{B}^2_{\varepsilon+\delta} \setminus \overline{\mathbb{B}^2_\varepsilon}$;
- si ha $\Psi(z) \geq c_0$ per ogni $z \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{B}^2_{\varepsilon+\delta/2}$, da cui $\Psi(z) + \Phi(z) \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{B}^2_{\varepsilon+\delta/2}$;
- si ha $\Psi(z) + \Phi(z) = \Phi(z) = \Phi_0(z)$ per ogni $z \in \mathbb{B}^2_\varepsilon$.

Consideriamo il dominio

$$\Omega := \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \rho(z) := \Psi(z) + \Phi(z) < 0\}.$$

Notiamo che $\Omega \subseteq \mathbb{B}^2_{\varepsilon+\delta/2}$, dove $\rho = \Psi + \Phi_0$ è una funzione convessa; per cui Ω è un dominio convesso limitato. Calcolando il gradiente di ρ, vediamo che esiste al più un punto $p_0 \in \partial\Omega$ dove il gradiente si annulla, che è della forma $p_0 = (0, ic)$; inoltre, $p_0 \in \overline{\mathbb{B}^2_{\varepsilon+\delta/2}} \backslash \overline{\mathbb{B}^2_\varepsilon}$. Dunque Ω è un dominio limitato e convesso tale che $\partial\Omega \backslash \{p_0\}$ è liscio. Si ha anche che ogni punto di $(\partial\Omega \backslash \{p_0\}) \cap (\mathbb{B}^2_{\varepsilon+\delta} \backslash \overline{\mathbb{B}^2_\varepsilon})$ è un punto del bordo di Ω strettamente convesso (perché in $\mathbb{B}^2_{\varepsilon+\delta} \backslash \overline{\mathbb{B}^2_\varepsilon}$ la funzione Ψ è strettamente convessa e la funzione Φ_0 è convessa); quindi per [Kr, Proposition 3.1.9] è pseudoconvesso, e per [D'A, Corollary 5.6] è un punto di tipo finito. Poniamo $A := \partial\Omega \cap \overline{\mathbb{B}^2_\varepsilon}$ e osserviamo che

$$A = \overline{\mathbb{B}^2_\varepsilon} \cap \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \Phi_0(z) = 0\};$$

si ha anche che ogni punto di A diverso da $(0, 0)$ è un punto del bordo di Ω di tipo finito (perché Φ_0 è strettamente convessa in $\overline{\mathbb{B}^2_\varepsilon} \setminus \{(0, 0)\}$, per cui ogni punto di A è strettamente convesso).

Possiamo ora procedere a dimostrare che Ω è (λ, κ)-visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

Proposizione 3.4.1. *([CMS, Corollary 1.10]) Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^n$. Supponiamo che esista un compatto $S \subseteq \partial\Omega$ tale che S_a, l'insieme dei punti di accumulazione di S, sia finito, e inoltre che ogni punto $p \in \partial\Omega \setminus S$ sia un punto liscio di bordo pseudoconvesso e di tipo finito. Allora Ω è (λ, κ)-visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.*

Dimostrazione. Mostriamo che, dati $p, q \in \partial\Omega$ con $p \neq q$, sono soddisfatte le ipotesi (i) e (ii) del Teorema 3.1.3. Per farlo, consideriamo $S_0 := S_a \cup \{p, q\}$. Allora, per finitezza di S_0, esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $\overline{B(x, \varepsilon_0)} \cap \overline{B(x', \varepsilon_0)} = \varnothing$ per ogni $x, x' \in S_0$. Adesso poniamo

$$S_1 := (S \cup \{p, q\}) \setminus \left(\bigcup_{x \in S_a} \overline{B(x, \varepsilon_0)} \right);$$

notiamo che S_1 è un insieme finito disgiunto dal compatto $K := \displaystyle\bigcup_{x \in S_a} \overline{B(x, \varepsilon_0)}$.

Dunque esiste $\varepsilon_1 > 0$ tale che:

- si ha $\overline{B(y, \varepsilon_1)} \cap K = \varnothing$ per ogni $y \in S_1$;
- $\overline{B(y, \varepsilon_1)} \cap \overline{B(y', \varepsilon_1)} = \varnothing$ per ogni $y, y' \in S_1$ con $y \neq y'$.

Distinguiamo ora due casi.

Caso 1: $p \notin K$.

Basta prendere $p' = p$ e $r = \varepsilon_1$.

Caso 2: $p \in K$.

In questo caso esiste un $x_0 \in S_a$ tale che $p \in \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}$. Consideriamo la seguente famiglia di insiemi con chiusure mutualmente disgiunte:

$$\mathcal{B} := \{B(x, \varepsilon_0) \mid x \in S_a\} \cup \{B(y, \varepsilon_1) \mid y \in S_1\};$$

allora esiste $\varepsilon_2 > 0$ tale che $\varepsilon_2 < \mathrm{dist}(B_1, B_2)/4$ per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Segue che $\mathcal{C} := \{B(x, \varepsilon_0 + \varepsilon_2) \mid x \in S_a\} \cup \{B(y, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \mid y \in S_1\}$ è una famiglia di insiemi con chiusure mutualmente disgiunte. Allora basta prendere $p' = x_0$ e $r = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Per concludere mostriamo adesso che, per ogni $\xi \in \partial\Omega \setminus S$, esistono un intorno U e una funzione f che soddisfano le ipotesi (1), (2) e (3) del Teorema 3.1.3. Fissiamo un tale ξ; allora sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 3.2.7 e di [FR, Proposition 2.5], per cui esistono un intorno U di ξ, due costanti $c, \varepsilon > 0$, un punto $z_0 \in \Omega$ e una costante A tali che, ponendo $f(x) := A + \dfrac{1}{2}\log x$ per ogni $x \in (0, +\infty)$, si ha

$$k_\Omega(z, z_0) \leq f\big(1/\delta_\Omega(z)\big)$$

e

$$K_\Omega(z; v) \geq c\frac{\|v\|}{\delta_\Omega(z)^\varepsilon}$$

per ogni $z \in \Omega \cap U$ e $v \in \mathbb{C}^n$. Ne consegue facilmente che le ipotesi (1), (2) e (3) del Teorema 3.1.3 sono soddisfatte, come voluto. $\square$

Basta allora prendere $S = \{p_0, (0,0)\}$ per ottenere che Ω soddisfa le ipotesi della Proposizione 3.4.1, dunque è (λ, κ)-visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

Mostriamo adesso che Ω non soddisfa la condizione (1) nella Definizione 3.1.1. Iniziamo notando che

$$\Omega \cap \mathbb{B}^2_{\varepsilon/2} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2_{\varepsilon/2} \mid \mathfrak{Im}(z_2) > \exp(-1/\|z\|^2)\};$$

dunque, per $r > 0$ sufficientemente piccolo, si ha che $p_r := (0, ir) \in \Omega$. Poniamo $v := (1, 0)$ e $s := \sqrt{\dfrac{1}{\log(1/r)} - r^2}$; allora la funzione $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$ data da $\varphi(\zeta) = p_r + \zeta s v$ è ben definita (cioè l'immagine è effettivamente contenuta in Ω) e olomorfa, per cui

$$K_\Omega(p_r; v) \leq \frac{1}{s}.$$

Adesso, poiché $(0,0) \in \partial\Omega$, si ha $\delta_\Omega(p_r) \leq r$, per cui

$$M_\Omega(r) \geq \frac{1}{K_\Omega(p_r; v)} \geq s = \sqrt{\frac{1}{\log(1/r)} - r^2};$$

per cui ci basta mostrare che, per $r_0 > 0$ sufficientemente piccolo affinché l'integranda sia definita, si ha

$$\int_0^{r_0} \frac{1}{r}\sqrt{\frac{1}{\log(1/r)} - r^2}\,\mathrm{d}r = +\infty.$$

Ciò segue facilmente confrontando con la funzione $r \longmapsto \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\log(1/r)}}$.

4 Ulteriori risultati

4.1 Sottovarietà non relativamente compatte

Vediamo adesso i risultati del preprint [BZ2] sui domini illimitati; continuando quanto fatto finora, punteremo a generalizzare questi risultati, arrivando a un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" per sottovarietà taut e con visibilità, ma non necessariamente relativamente compatte.

Come si può facilmente vedere pensando all'esempio della mappa $z \longmapsto z+1$ nel semipiano superiore $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im} z > 0\}$, restringerci ai punti del bordo non sarà sufficiente. In questo caso, grazie a un biolomorfismo con $\mathbb{D}$ ci possiamo ricondurre al Teorema di Wolff-Denjoy originale; troviamo così che il limite è un punto di $\partial\mathbb{D}$ nel quale non possiamo estendere il biolomorfismo. È dunque chiaro che i risultati che vogliamo andare a studiare dipendono da come il dominio o la sottovarietà si immergono nella varietà ambiente, e in generale non possiamo aspettarci di avere sempre un bordo sufficientemente ricco per descrivere la dinamica delle iterate di funzioni olomorfe.

Dobbiamo dunque estendere la nostra varietà come spazio topologico. Il modo giusto di farlo per ritrovare un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" è la compattificazione delle fini. Il concetto fondamentale per definire la compattificazione delle fini è quello di fine, definito da Freudenthal in [F]. Diamo la definizione data in [Sp, Chapter 1, Problem 19].

Definizione 4.1.1. Sia X uno spazio topologico non compatto. Una *fine* di X è una funzione e con dominio $\{K \subseteq X \mid K \text{ è compatto}\}$ tale che:

(i) a ogni compatto $K \subseteq X$ associa una componente connessa non vuota di $X \setminus K$;
(ii) per ogni coppia di compatti $K_1 \subseteq K_2 \subseteq X$ si ha $e(K_2) \subseteq e(K_1)$.

Indichiamo con $\mathcal{E}(X)$ l'insieme di tutte le fini di X.

Osservazione 4.1.2. Dato un compatto $K \subseteq X$, se una componente connessa C di $X \setminus K$ è relativamente compatta in X, non si potrà mai avere $e(K) = C$; altrimenti, non potrebbe essere soddisfatta la condizione (ii) nella Definizione 4.1.1 con K e $K \cup \overline{C}$.

Intuitivamente, una fine è un modo di scegliere, andando all'infinito, "da che parte andare". Un esempio semplice per capire quest'interpretazione è l'albero binario infinito (lo si può pensare come un sottospazio di $\mathbb{R}^2$), dove a ogni livello ci troviamo in un nodo e abbiamo due possibili strade tra cui scegliere; poiché i livelli sono numerabili, è facile vedere che la cardinalità delle fini è quella del continuo.

Osservazione 4.1.3. Supponiamo che X ammetta un'esaustione in compatti, cioè che esista una successione di compatti $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$ per ogni n e che $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n = X$; nei casi che studieremo X sarà sempre una varietà connessa o la chiusura di una sottovarietà connessa in una varietà ambiente, per cui ammetterà un'esaustione in compatti. Allora una fine e è univocamente determinata dalle sue immagini sui K_n (segue facilmente dalle proprietà della fine e da quelle dell'esaustione). Quindi, nel seguito, ci basterà fissare un'esaustione in compatti e lavorare con quella.

Vogliamo ora mettere una topologia su $X^{\mathcal{E}} := X \cup \mathcal{E}(X)$ che lo renda uno spazio compatto. Sebbene le fini sono state definite con questo scopo in mente, sono comunque necessarie delle ipotesi. Si tratta di ipotesi che in generale sono soddisfatte da varietà astratte, ma poiché ci interesserà compattificare la chiusura di una sottovarietà dovremo prestare attenzione a un'ipotesi in particolare (si vedano l'Osservazione 4.1.6 e l'Esempio 4.1.7).

Proposizione 4.1.4. *Sia X uno spazio topologico connesso, localmente connesso, localmente compatto, di Hausdorff e che ammette un'esaustione in compatti. Mettiamo su $X^{\mathcal{E}}$ la topologia generata dalla topologia di X e dai seguenti intorni per $e \in \mathcal{E}(X)$ al variare di $K \subseteq X$ compatto:*

$$N_K(e) = e(K) \cup \{f \in \mathcal{E}(X) \mid f(K) = e(K)\};$$

allora $X^{\mathcal{E}}$ è uno spazio compatto e di Hausdorff.

Dimostrazione. Che $X^{\mathcal{E}}$ è di Hausdorff segue facilmente dalle definizioni.

Supponiamo che $\mathcal{E}(X)$, come sottospazio di $X^{\mathcal{E}}$, sia compatto e mostriamo che in tal caso anche $X^{\mathcal{E}}$ è compatto. Fissiamo un'esaustione in compatti $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di X. Sia $\{U_i \mid i \in I\}$ un ricoprimento aperto di $X^{\mathcal{E}}$. Siccome $\mathcal{E}(X)$ è compatto, esiste un sottoinsieme finito $J \subseteq I$ tale che per ogni $e \in \mathcal{E}(X)$ esistono $j \in J$, un compatto K_{n_j} dell'esaustione e $C_j \subseteq U_j$ una componente connessa di $X \setminus K_{n_j}$ non relativamente compatta in X tali che $e(K_{n_j}) = C_j$. Ponendo $p = \max\limits_{j\in J} n_j$, abbiamo che $\{U_j \mid j \in J\}$ è un sottoricoprimento finito delle componenti connesse di $X \setminus K_p$ non relativamente compatte in X.

Notiamo che $K_p \subseteq \overset{\circ}{K}_{p+1}$ implica che $K_p \cap \partial K_{p+1} = \varnothing$, per cui una componente connessa di $X \setminus K_p$ interseca ∂K_{p+1} o è inclusa in K_{p+1} (deve necessariamente intersecare K_{p+1} per connessione di X). Dato che $X \setminus K_p$ è un aperto dello spazio localmente connesso X, è anch'esso localmente connesso, per cui le sue componenti connesse sono aperte; allora, poiché ∂K_{p+1} è compatto e tali componenti sono disgiunte, solo un numero finito di esse lo interseca. Segue che K, l'unione di K_{p+1} con la chiusura delle componenti connesse di $X \setminus K_p$ relativamente compatte in X e che intersecano ∂K_{p+1}, è compatto; in particolare, esiste un sottoinsieme finito $J' \subseteq I$ tale che $\{U_j \mid j \in J'\}$ ricopre K. Otteniamo che $\{U_j \mid j \in J \cup J'\}$ è un sottoricoprimento finito di $X^{\mathcal{E}}$; dunque quest'ultimo è compatto, come voluto.

Quindi, per concludere la dimostrazione, è sufficiente mostrare che $\mathcal{E}(X)$ è compatto. Indichiamo con $\pi(K_n)$ l'insieme delle componenti connesse di $X \setminus K_n$ non relativamente compatte in X. Usando il fatto che tali componenti devono intersecare ∂K_{n+1} e ragionando come sopra, troviamo che ogni $\pi(K_n)$ è finito;

in particolare, se mettiamo su ciascuno di questi insiemi la topologia discreta otteniamo che il prodotto $\prod_{n=1}^{+\infty} \pi(K_n)$ è compatto.

Consideriamo adesso la funzione $\phi : \mathcal{E}(X) \longrightarrow \prod_{n=1}^{+\infty} \pi(K_n)$ che manda ogni fine e nell'elemento che ha $e(K_n)$ come n-esima coordinata; per ottenere la tesi, è sufficiente mostrare che ϕ è un omeomorfismo con l'immagine e che l'immagine è chiusa. Per definizione, ϕ è iniettiva. Per mostrare che è continua, dalla definizione di topologia prodotto ci basta verificare che la preimmagine di aperti $U \subseteq \prod_{n=1}^{+\infty} \pi(K_n)$ della forma

$$\left\{ \prod_{n=1}^{+\infty} A_n \mid A_n = \{C_n\} \text{ per ogni } 1 \leq n \leq r, A_n = \pi(K_n) \text{ altrimenti} \right\},$$

per qualche $r \in \mathbb{N}$, è aperta. Dato U siffatto, si ha che

$$\phi^{-1}(U) = \mathcal{E}(X) \cap \bigcap_{n=1}^{r} N_{K_n}(e)$$

se esiste $e \in \mathcal{E}(X)$ tale che $e(K_n) = C_n$ per ogni $1 \leq n \leq r$, ed è vuota altrimenti; in ogni caso, è un aperto di $\mathcal{E}(X)$ come sottospazio di $X^{\mathcal{E}}$, per cui ϕ è continua. Per mostrare che è aperta se restringiamo il codominio all'immagine, non è difficile verificare che basta controllare che siano aperte le immagini di aperti V della forma $\mathcal{E}(X) \cap N_K(e)$ al variare di K compatto; dato un tale V, abbiamo che

$$\phi(V) = \phi\big(\mathcal{E}(X)\big) \cap \{(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid C_r \subseteq e(K)\},$$

dove r è il minimo naturale tale che $K \subseteq K_r$. Segue che $\phi(V)$ è aperto in $\phi\big(\mathcal{E}(X)\big)$. Ci resta solo da dimostrare che $\phi\big(\mathcal{E}(X)\big)$ è chiuso in $\prod_{n=1}^{+\infty} \pi(K_n)$. Si ha

$$\phi\big(\mathcal{E}(X)\big) = \left\{ (C_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{+\infty} \pi(K_n) \mid C_j \subseteq C_i \text{ per ogni } i \leq j \right\}.$$

Dati $i \leq j$, poniamo $\phi_{ij} : \pi(K_j) \longrightarrow \pi(K_i)$ la funzione che manda ogni componente connessa di $X \setminus K_j$ non relativamente compatta in X nella componente connessa di $X \setminus K_i$ che la contiene. Poiché $C_j \subseteq C_i$ è equivalente a $\phi_{ij}(C_j) = C_i$, segue che

$$\phi\big(\mathcal{E}(X)\big) = \bigcap_{i\leq j} \left\{ C \in \prod_{n=1}^{+\infty} \pi(K_n) \mid (\phi_{ij} \circ p_j)(C) = p_i(C) \right\},$$

dove $p_m : \prod_{n=1}^{+\infty} \pi(K_n) \longrightarrow \pi(K_m)$ è la proiezione: $p_m(C) = C_m$ se $C = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Poiché ϕ_{ij}, p_i e p_j sono continue e $\pi(K_i)$ è Hausdorff per ogni $i \leq j$, abbiamo che $\phi\big(\mathcal{E}(X)\big)$ è un'intersezione arbitraria di chiusi; dunque è chiuso, come voluto. $\square$

Osservazione 4.1.5. Se X ammette un'esaustione in compatti $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ponendo $U_n^e = N_{K_n}(e)$ si ha che $\{U_n^e\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni per e. Allora, se X soddisfa anche le ipotesi della Proposizione 4.1.4 ed è primo numerabile, si ha che $X^{\mathcal{E}}$ è compatto e primo numerabile, per cui è compatto per successioni.

Osservazione 4.1.6. Come già accennato, data X sottovarietà connessa di una varietà Y, andremo a studiare $\overline{X}^{\mathcal{E}}$. In tal caso, è facile verificare che $\overline{X}$ soddisfa tutte le ipotesi della Proposizione 4.1.4 tranne una: la locale connessione. Il motivo è perché in generale non è vera, come vedremo nell'esempio seguente.

Esempio 4.1.7. Si consideri l'embedding di $(0, 1)$ in $\mathbb{R}^2$ dato dalla funzione $x \longmapsto \big(x, \sin(1/x)/x\big)$. A meno di considerarne un "ispessimento" che diventa sempre più piccolo al tendere di x a 0, possiamo anche renderlo un dominio proprio e semplicemente connesso Ω di $\mathbb{C}$ (dunque biolomorfo a $\mathbb{D}$) avente bordo liscio al di fuori dell'asse immaginario.

Il sottospazio $\overline{\Omega}$ non è localmente connesso. Ragionando come nell'Osservazione 4.1.5, $\overline{\Omega}^{\mathcal{E}}$ è primo numerabile. Per vedere che non vale la Proposizione 4.1.4, ci basta dunque vedere che non è compatto per successioni. Consideriamo allora una successione di punti contenuti in delle "gobbe" che si avvicinano all'asse immaginario. Questa chiaramente non ammette sottosuccessioni convergenti in $\overline{\Omega}$. Tuttavia, per l'Osservazione 4.1.2 non ammette nemmeno sottosuccessioni convergenti a un punto di $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$; infatti, poiché ogni esaustione in compatti prima o poi dovrà coprire il compatto $\overline{\Omega} \cap [0, 1]$, le uniche componenti connesse non relativamente compatte dei complementari dei compatti saranno, definitivamente, due semirette dell'asse immaginario. È chiaro però che nessun punto della successione vi può appartenere, ma dato che queste semirette, unite alle opportune fini, formano un sistema fondamentale di intorni per le fini stesse, segue che non ci sono nemmeno sottosuccessioni convergenti a una fine.

Possiamo ora estendere il concetto di visibilità a sottovarietà connesse non relativamente compatte.

Definizione 4.1.8. Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y. Supponiamo che $\overline{X}$ sia localmente connessa e definiamo il *bordo delle fini* come $\partial^{\mathcal{E}} X := \partial_Y X \cup \mathcal{E}(X)$. Fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$; diciamo che X è (λ, κ)-*ultravisibile* se:

1. ogni due punti distinti di X possono essere collegati da una (λ, κ)-simil-geodetica;

2. per ogni coppia di punti $\xi, \eta \in \partial^{\mathcal{E}} X$ con $\xi \neq \eta$, esistono in $\overline{X}^{\mathcal{E}}$ due intorni V_ξ e V_η, di ξ e η rispettivamente, con chiusura disgiunta, e un compatto K di X tali che ogni (λ, κ)-simil-geodetica in X che collega un punto di V_ξ a un punto di V_η interseca K.

Osservazione 4.1.9. Non escludiamo la possibilità che l'ipotesi che $\overline{X}$ sia localmente connessa sia ridondante, perché potrebbe seguire in qualche modo dalla condizione di ultravisibilità (per esempio, quest'ultima potrebbe implicare una qualche regolarità per $\partial_Y X$). Non sappiamo se sia effettivamente vero, e in caso lo sia crediamo che la dimostrazione sia tutt'altro che semplice.

Facciamo però notare che per l'Esempio 4.1.7, sfruttando un biolomorfismo con $\mathbb{D}$ esteso ai punti regolari del bordo, si può mostrare che non vale la condizione di ultravisibilità. Esistono anche esempi ([A6, Example 3.3.8]), sempre ispirati al seno del topologo, di domini limitati di $\mathbb{C}$ biolomorfi a $\mathbb{D}$ per i quali non vale l'analogo del teorema di Wolff-Denjoy; dal Corollario 2.4.2 segue che non soddisfano la condizione di visibilità, in quanto è facile verificare che soddisfano tutte le altre ipotesi.

Adesso vogliamo dimostrare un teorema di tipo "Wolff-Denjoy" per sottovarietà Kobayashi-iperboliche, taut e $(1, \kappa_0)$-ultravisibili. Per farlo, in alcuni punti del nostro ragionamento riadatteremo le dimostrazioni degli enunciati visti nella sezione 2, ma in altri dovremo ricavarci nuovi risultati.

Lemma 4.1.10. *Sia X una sottovarietà complessa e connessa di una varietà complessa Y. Supponiamo che $\overline{X}$ sia localmente connessa e che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-ultravisibile. Siano Z una varietà Kobayashi-iperbolica e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Hol}(Z, X)$ una successione compattamente divergente. Allora esistono $\xi \in \partial^{\mathcal{E}} X$ e una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tali che $f_{n_j}(z) \longrightarrow \xi$ per ogni $z \in Z$.*

Dimostrazione. Si ripete la dimostrazione del Lemma 2.3.1. Al posto della relativa compattezza si usa l'Osservazione 4.1.5, sostituendo $\partial^{\mathcal{E}} X$ a $\partial_Y X$. Si usa anche l'ultravisibilità al posto della visibilità. $\square$

Proposizione 4.1.11. *Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica di una varietà complessa Y. Supponiamo che $\overline{X}$ sia localmente connessa e che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-ultravisibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente. Allora esiste $\xi \in \partial^{\mathcal{E}} X$ tale che per ogni funzione $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente per cui esiste $y_0 \in X$ tale che*

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} k_X\big(F^{\mu(j)}(y_0), y_0\big) = +\infty \tag{44}$$

si ha

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} F^{\mu(j)}(z) = \xi \tag{45}$$

per ogni $z \in X$.

Dimostrazione. Si ripete la dimostrazione della Proposizione 2.3.2 con le seguenti modifiche: $\overline{X}^{\mathcal{E}}$ e $\partial^{\mathcal{E}} X$ al posto di $\overline{X}$ e $\partial_Y X$; "per compattezza per successioni di $\overline{X}^{\mathcal{E}}$" al posto di "per relativa compattezza di X"; ultravisibilità al posto di visibilità. $\square$

Lemma 4.1.12. *Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica di una varietà complessa Y. Supponiamo che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-ultravisibile. Siano $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di punti di X tali che $x_n \longrightarrow \xi$ e $y_n \longrightarrow \xi'$, con $\xi, \xi' \in \partial^{\mathcal{E}} X$ e $\xi \neq \xi'$.*

Allora non può essere che $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} k_X(x_n, y_n) = 0$.

Dimostrazione. L'unica modifica rispetto alla dimostrazione del Lemma 2.3.3 è quale bordo viene considerato. $\square$

Lemma 4.1.13. *Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica di una varietà complessa Y. Supponiamo che $\overline{X}$ sia localmente connessa e che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-ultravisibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.*

Supponiamo che esistano un compatto $K \subseteq X$, una funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ e $\xi \in \partial^{\mathcal{E}} X$ tali che per ogni intorno U di ξ in $\overline{X}^{\mathcal{E}}$ esiste j_0 tale che per ogni $j \geq j_0$ si ha $F^{\mu(j)}(K) \subseteq U$. Allora la successione $\{F^{\mu(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ in $C^0(X, \overline{X}^{\mathcal{E}})$.

Dimostrazione. Si ripete la dimostrazione del Lemma 2.3.4 con le opportune sostituzioni, in particolare si usa Lemma 4.1.10 al posto del Lemma 2.3.1 e il Lemma 4.1.12 al posto del Lemma 2.3.3. Ricordiamo anche che per l'Osservazione 4.1.5 si ha la compattezza per successioni. $\square$

Lemma 4.1.14. *Sia X una sottovarietà Kobayashi-iperbolica di una varietà complessa Y. Supponiamo che $\overline{X}$ sia localmente connessa e che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-ultravisibile. Sia $F \in \mathrm{Hol}(X, X)$ tale che la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia compattamente divergente.*

Per ogni funzione strettamente crescente $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ esistono $\xi \in \partial^{\mathcal{E}} X$ e una sottosuccessione $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tale che la successione $\{F^{\mu(j_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge alla costante ξ in $C^0(X, \overline{X}^{\mathcal{E}})$.

Dimostrazione. Come la dimostrazione della Proposizione 2.3.5, usando il Lemma 4.1.13 al posto del Lemma 2.3.4. $\square$

Siamo ora pronti a dimostrare il teorema di tipo "Wolff-Denjoy" nel caso non relativamente compatto.

Teorema 4.1.15. *Sia X una sottovarietà taut di una varietà complessa Y. Supponiamo che $\overline{X}$ sia localmente connessa e che esista $\kappa_0 > 0$ tale che X sia $(1, \kappa_0)$-ultravisibile.*

Sia $F : X \longrightarrow X$ una funzione olomorfa. Allora vale esattamente una delle seguenti affermazioni:

- *le orbite dei punti di X tramite F sono relativamente compatte in X; oppure,*
- *esiste un unico punto $\xi \in \partial^{\mathcal{E}} X$ tale che la successione delle iterate di F converge alla costante ξ in $C^0(X, \overline{X}^{\mathcal{E}})$.*

Dimostrazione. La dimostrazione ricalca quella del Teorema 2.4.1. Riportiamo gli adattamenti necessari. Ricordiamo che ogni volta che nella dimostrazione del suddetto Teorema compaiono $\overline{X}$, $\partial_Y X$ e "visibilità", in questa dimostrazione vanno sostituiti con $\overline{X}^{\mathcal{E}}$, $\partial^{\mathcal{E}} X$ e "ultravisibilità".

Dopo aver applicato il Teorema 1.2.41, si usano il Lemma 4.1.10 per dire che l'insieme delle funzioni di limite di F in $C^0(X, \overline{X}^{\mathcal{E}})$ è composto dalle sole costanti, e il Lemma 4.1.14 per dire che è non vuoto. Se, come nella dimostrazione del Teorema 2.4.1, facciamo vedere che è composto da un'unica funzione costante, allora con un semplice assurdo otteniamo che tutta la successione $\{F^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a tale costante in $C^0(X, \overline{X}^{\mathcal{E}})$. Ci resta solo da vedere che l'insieme delle funzioni limite non contiene due funzioni.

Caso 1 della dimostrazione del Teorema 2.4.1: si usa la Proposizione 4.1.11 al posto della Proposizione 2.3.2; si usa il Lemma 4.1.14 al posto della Proposizione 2.3.5; si usa il Lemma 4.1.13 al posto del Lemma 2.3.4; al posto di scrivere $d_Y\big(F^{\mu_{j_m}-l_m}(o), \eta\big) < 1/m$, dobbiamo dire che $F^{\mu_{j_m}-l_m}(o) \longrightarrow \eta$.

Caso 2: per definire G_δ nel caso in cui $\xi \in \mathcal{E}(\overline{X})$, si considerano gli $m \in \mathbb{N}$ tali che $F^m(x_1) \in \xi\big(K_{\lfloor 1/\delta \rfloor} \cap \overline{X}\big)$, dove $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un'esaustione in compatti di Y (la dimostrazione che $\sup\limits_{\delta>0, x_1, x_2 \in K} G_\delta(x_1, x_2) < +\infty$ si riadatta facilmente).

Per dire che $\liminf\limits_{z\longrightarrow\eta} \inf\limits_{y\in K} k_X(z, y) > 0$ facciamo così: prendiamo un compatto $H \subseteq X$ tale che $K \subseteq \mathring{H}$, e osserviamo che la funzione che associa a $x \in K$ la quantità inf $\left\{y \in X \setminus \mathring{H}\right\}$ è una funzione continua e strettamente positiva su un compatto.

Il resto della dimostrazione può essere riadattato in modo simile a quanto già detto sopra. □

Costruiamo adesso un esempio di dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$ taut, ultravisibile, con chiusura localmente connessa e tale che la cardinalità di $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ sia più che numerabile, riprendendo da [BZ2, Section 2]; si noti che un tale dominio soddisfa le ipotesi del Teorema 4.1.15.

Partiamo dalla seguente definizione, che generalizza il concetto di dominio Goldilocks.

Definizione 4.1.16. Un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ si dice *localmente Goldilocks* se per ogni $\xi \in \partial\Omega$ esiste un intorno U di ξ in $\overline{\Omega}$ tale che:

(1) esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{r} M_{\Omega,U}(r)\,\mathrm{d}r < +\infty$;

(2) per ogni $z_0 \in \Omega$ esistono due costanti $C, \alpha > 0$ (che dipendono da z_0 e da U) tali che $k_\Omega(z_0, z) \le C + \alpha \log \dfrac{1}{\delta_\Omega(z)}$ per ogni $z \in \Omega \cap U$.

Dimostriamo che essere localmente Goldilocks è una condizione sufficiente affinché un dominio Kobayashi-iperbolico sia ultravisibile.

Proposizione 4.1.17. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio Kobayashi-iperbolico e localmente Goldilocks. Allora Ω è (λ, κ)-ultravisibile per ogni $\lambda \ge 1$ e $\kappa > 0$.*

Dimostrazione. Fissiamo $\lambda \ge 1$ e $\kappa \ge 0$. Fissiamo anche $\xi, \eta \in \partial^{\mathcal{E}}\Omega$ e V_ξ, V_η come nel punto 2 della Definizione 4.1.8; diremo più avanti come sceglierli. Fissiamo un'esaustione in compatti $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di Ω. Supponiamo per assurdo che, per ogni $j \in \mathbb{N}$, esista una (λ,κ)-simil-geodetica $\sigma_j : [0, T_j] \longrightarrow \Omega$ con $\sigma_j(0) \in V_\xi$, $\sigma_j(T_j) \in V_\eta$ e $\sigma_j([0, T_j]) \cap K_j = \varnothing$.

Per ottenere una contraddizione, dobbiamo scegliere V_ξ e V_η in modo opportuno. Se $\xi, \eta \in \partial\Omega$, basta che li prendiamo localmente compatti. Se $\xi \in \partial\Omega$ e $\eta \in \mathcal{E}(\overline{\Omega})$ (o viceversa), prendiamo un compatto K di $\overline{\Omega}$ la cui parte interna contiene un intorno compatto di ξ; scegliamo come V_ξ la parte interna di tale intorno e $V_\eta = \eta(K)$. Se $\xi, \eta \in \mathcal{E}(\overline{\Omega})$ basta prendere $V_\xi = \xi(K), V_\eta = \eta(K)$, dove K è un compatto sufficientemente grande.

In tutti i casi sopra, abbiamo scelto gli intorni in modo che esista un compatto K di $\overline{\Omega}$ tale che, per ogni $j \in \mathbb{N}$, deve esistere $t_j \in [0, T_j]$ per cui $\sigma_j(t_j) \in K$. A meno di sottosuccessioni, possiamo supporre $\sigma_j(t_j) \longrightarrow x_0 \in \overline{\Omega}$. Poiché $\sigma_j([0, T_j]) \cap K_j = \varnothing$ per ogni j, dev'essere $x_0 \in \partial\Omega$. Sia U l'intorno di x_0 dato dal punto (2) della Definizione 4.1.16, e osserviamo che lo possiamo prendere limitato. Di nuovo a meno di sottosuccessioni, possiamo trovare un intervallo $[a_j, b_j] \subseteq [0, T_j]$ contenente t_j tale che:

(i) si ha $\sigma_j([a_j, b_j]) \subseteq U$ per ogni $j \in \mathbb{N}$;

(ii) si ha $\inf\limits_{j\ge 1} \|\sigma_j(a_j) - \sigma_j(b_j)\| > 0$;

possiamo imporre il punto (ii) perché $\overline{V}_\xi \cap \overline{V}_\eta = \varnothing$, per cui senza perdita di generalità $x_0 \notin \overline{V}_\xi$ e basta chiedere che $U \subseteq \overline{\Omega} \setminus \overline{V}_\xi$.

Adesso, poiché U è limitato esiste $R > 0$ tale che

$$\sigma_j([a_j, b_j]) \subseteq \mathbb{B}^n_R \tag{46}$$

per ogni $j \ge 1$. A meno di riparametrizzazioni, possiamo supporre che si abbia $0 \in [a_j, b_j]$ e che

$$\delta_\Omega\big(\sigma_j(0)\big) = \max\big\{\delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big) \mid t \in [a_j, b_j]\big\}.$$

Allora, di nuovo a meno di sottosuccessioni, possiamo supporre che valgano le seguenti convergenze: $a_j \longrightarrow a \in [-\infty, 0]$, $b_j \longrightarrow b \in [0, +\infty]$, $\sigma_j(a_j) \longrightarrow \xi'$ e $\sigma_j(b_j) \longrightarrow \eta'$. Per la condizione (ii) sopra, deve esistere $\varepsilon > 0$ tale che $\|\xi' - \eta'\| \ge \varepsilon$.

Vogliamo ora mostrare che le funzioni $\sigma_j|_{[a_j,b_j]}$ sono equilipschitziane rispetto alla distanza euclidea. Per il punto 1 della Definizione 4.1.16 esiste $\delta > 0$ tale che $0 < M_{\Omega,U}(r) < 1$ per ogni $r \in (0, \delta)$. Allora dalla definizione di $M_{\Omega,U}$ abbiamo che $K_\Omega(z; v) \geq \|v\|$ per ogni $z \in \Omega \cap U$ tale che $\delta_\Omega(z) < \delta$ e per ogni $v \in \mathbb{C}^n$. Inoltre, poiché $U \cap \{z \in \Omega \mid \delta_\Omega(z) \geq \delta\} \subset\subset \Omega$, per il punto (1) della Proposizione 2.2.2 esiste una costante $c_0 > 0$ tale che $K_\Omega(z; v) \geq c_0\|v\|$ per ogni $z \in \Omega \cap U$ tale che $\delta_\Omega(z) \leq \delta$ e per ogni $v \in \mathbb{C}^n$. Ponendo $c = \min\{1, c_0\}$ e dati $s, t \in [a_j, b_j]$, si ha dunque che

$$\begin{aligned}\|\sigma_j(t) - \sigma_j(s)\| &= \left\| \int_s^t \sigma_j'(r)\,\mathrm{d}r \right\| \leq \int_s^t \|\sigma_j'(r)\|\,\mathrm{d}r \\ &\leq \int_s^t \frac{1}{c} K_\Omega\big(\sigma_j(r); \sigma_j'(r)\big)\,\mathrm{d}r \leq \frac{\lambda}{c}|s - t|,\end{aligned}$$

dove la penultima disuguaglianza segue da quanto trovato sopra e l'ultima dalla definizione di simil-geodetica.

Dall'equilipschitziane e dall'equilimitatezza data da (46), per il teorema di Ascoli-Arzelà, sempre a meno di sottosuccessioni, abbiamo che $\sigma_j|_{(a_j,b_j)}$ converge uniformemente sui compatti di (a, b) a una curva $\sigma : (a, b) \longrightarrow \overline{\Omega}$. Per l'equilipschitzianità (sugli $[a_j, b_j]$) si ha $0 < \|\xi' - \eta'\| \leq \frac{\lambda}{c}|b - a|$, per cui $a \neq b$. Come fatto nella dimostrazione del Teorema 3.1.3, si può mostrare che σ non è costante.

Adesso ricordiamo che $\delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big) \leq \delta_\Omega\big(\sigma_j(0)\big)$ per ogni $t \in [a_j, b_j]$, e che $\sigma_j([a_j, b_j]) \subseteq U$. Quindi

$$M_{\Omega,U}\Big(\delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big)\Big) \leq M_{\Omega,U}\Big(\delta_\Omega\big(\sigma_j(0)\big)\Big),$$

allora il membro sinistro di questa disuguaglianza tende a 0 uniformemente in t per $j \longrightarrow +\infty$. Dati dunque $s, u \in (a, b)$ con $s \leq u$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\|\sigma(s) - \sigma(u)\| &= \lim_{j\longrightarrow+\infty} \|\sigma_j(s) - \sigma_j(u)\| \leq \limsup_{j\longrightarrow+\infty} \int_s^u \|\sigma_j'(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \lambda \limsup_{j\longrightarrow+\infty} \int_s^u M_{\Omega,U}\Big(\delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t = 0,\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza si ha perché $\|\sigma_j'(t)\| \leq \lambda M_{\Omega,U}\Big(\delta_\Omega\big(\sigma_j(t)\big)\Big)$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, dalle definizioni. Dunque σ è costante, contraddizione. $\square$

Prima di procedere con la costruzione del dominio in $\mathbb{C}^2$, dobbiamo costruire un esempio in $\mathbb{C}$.

Definizione 4.1.18. Un *cono circolare aperto con apertura* θ è un aperto di $\mathbb{C}^n$ della forma

$$\Gamma(v, \theta) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{Re}\langle z, v\rangle > \cos(\theta/2)\|z\|\},$$

dove v è un vettore unitario di $\mathbb{C}^n$ e $\theta \in (0, \pi)$. Per ogni punto $p \in \mathbb{C}^n$, l'*asse* del cono traslato $p + \Gamma(v, \theta)$ è l'insieme $\{p + tv \mid t > 0\}$.

Definizione 4.1.19. Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}^n$. Diciamo che Ω soddisfa una *condizione di cono interno* se per ogni $R > 0$ esistono due costanti $r > 0$ e $\theta \in (0, \pi)$, e un compatto $K \subseteq \Omega$, tali che per ogni $x \in (\Omega \setminus K) \cap \mathbb{B}^n_R$ esistono un punto $\xi_x \in \partial\Omega$ e un vettore unitario v_x tali che:

- il punto x appartiene all'asse del cono traslato $\xi_x + \Gamma(v_x, \theta)$;
- si ha $\big(\xi_x + \Gamma(v_x, \theta)\big) \cap (\xi_x + \mathbb{B}^n_r) \subseteq \Omega$.

Definizione 4.1.20. Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}^n$. Diciamo che Ω soddisfa una *condizione di cono esterno* se per ogni $R > 0$ esistono due costanti $r > 0$ e $\theta \in (0, \pi)$, e un compatto $K \subseteq \Omega$, tali che per ogni $\xi \in \partial\Omega \cap \mathbb{B}^n_R$ esiste un vettore unitario v_ξ tale che

$$\big(\xi + \Gamma(v_\xi, \theta)\big) \cap (\xi + \mathbb{B}^n_r) \subseteq \mathbb{C}^n \setminus \Omega.$$

Lemma 4.1.21. *Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}^n$ che soddisfa una condizione di cono interno. Allora Ω soddisfa la condizione (2) nella definizione di dominio localmente Goldilocks.*

Dimostrazione. Per ogni $\beta > 1$ definiamo la funzione olomorfa $\psi_\beta : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ come $\psi_\beta(\zeta) := (1 + \zeta)^{1/\beta}$ e $\psi_\beta(0) := 1$. Dati un vettore unitario $v \in \mathbb{C}^n$ e un numero $l > 0$, definiamo la funzione olomorfa $\psi(\cdot; \beta, v, l) : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ come $\Psi(\zeta; \beta, v, l) = l\psi_\beta(\zeta)v$, e indichiamo la sua immagine con $\mathcal{L}(\beta, v, r)$.

Fissiamo ora $\xi \in \partial\Omega$, e prendiamo $R > 0$ e un intorno U di ξ tali che $U \subset\subset \mathbb{B}^n_R$; è facile vedere che esistono $R' > 0$ e $\alpha > 1$ tali che

$$R'\psi_\alpha(\mathbb{D}) \subseteq \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}\zeta > \cos(\theta/2)|\zeta| \text{ e } |\zeta| < r\},$$

dove θ e r sono dati dalla condizione di cono interno, e dipendono da R. Sia K il compatto, anch'esso dipendente da R, dato sempre dalla condizione di cono interno; allora esiste un compatto K' con $K \subseteq K' \subseteq \Omega$ e tale che, per ogni $x \in (\Omega \setminus K') \cap \mathbb{B}^n_R$, esistono $\xi_x \in \partial\Omega$ e un vettore unitario v_x per cui:

(i) si ha $\xi_x + \mathcal{L}(\alpha, v_x, R') \subseteq \Omega$;
(ii) il punto x appartiene al segmento che va da ξ_x a $q_x := \xi_x + \Psi(0; v_x, \alpha, R')$;
(iii) si ha che $q_x \in K'$.

Allora, per ogni tale x, esiste un unico numero $t(x) > 0$ tale che si abbia $\xi_x + t(x)v_x = x$. Chiaramente $\delta_\Omega(x) \leq t(x)$. Inoltre, $\Psi(\cdot; \alpha, v_x, R')$ mappa il punto $\big(t(x)/R'\big)^\alpha - 1 \in (-1, 0)$ nel punto $x - \xi_x$.

Fissiamo $z_0 \in \Omega$; è sufficiente verificare la tesi per $z \in (\Omega \setminus K') \cap \mathbb{B}^n_R$. Poniamo $C := \sup\{k_\Omega(y, z_0) \mid y \in K'\}$. Allora, per quanto trovato sopra, si ha

$$\begin{aligned}
k_\Omega(z_0, z) &\leq k_\Omega(z_0, q_z) + k_\Omega(q_z, z) \leq C + \omega\Big(0, \big(t(x)/R'\big)^\alpha - 1\Big) \\
&= C + \frac{1}{2}\log\left(\frac{2 - \big(t(x)/R'\big)^\alpha}{\big(t(x)/R'\big)^\alpha}\right) \leq C + \frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{\big(t(x)/R'\big)^\alpha}\right) \\
&\leq \left(C + \frac{1}{2}\log\big(2(R')^\alpha\big)\right) + \frac{\alpha}{2}\log\left(\frac{1}{\delta_\Omega(z)}\right);
\end{aligned}$$

poiché $k_\Omega(z_0, z) \leq C$ per ogni $z \in K' \cap \mathbb{B}^n_R$, la tesi segue. □

Lemma 4.1.22. *Sia $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un dominio che soddisfa una condizione di cono esterno. Allora, per ogni $R > 0$, esiste $c > 0$ tale che per ogni $z \in \Omega \cap \mathbb{D}_R$ e per ogni $v \in \mathbb{C}$ si ha*

$$K_\Omega(z; v) \geq \frac{c|v|}{\delta_\Omega(z)}.$$

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui $\mathbb{D}_{2R} \subseteq \Omega$. Allora $\overline{\mathbb{B}_R} \subseteq \Omega$ è compatto; dunque, per il punto (1) della Proposizione 2.2.2, esiste una costante $c_0 > 0$ tale che $K_\Omega(z; v) \geq c_0|v|$ per ogni $z \in \overline{\mathbb{B}_R}$ e per ogni $v \in \mathbb{C}$. Poiché in questo caso $\delta_\Omega(z) \leq R$, la tesi segue.

Supponiamo ora che $\mathbb{B}_{2R} \not\subseteq \Omega$. Fissiamo $z \in \Omega \cap \mathbb{B}_R$, e sia $x \in \partial\Omega$ tale che $|z - x| = \delta_\Omega(z)$. Dev'essere $|x| \leq 4R$. Per la condizione di cono esterno, esistono $\theta \in (0, \pi)$ e $r > 0$ e un vettore unitario u tali che

$$\big(x + \Gamma(u, \theta)\big) \cap D(x, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \Omega;$$

inoltre, possiamo scegliere θ e r che dipendano solo da R.

Poniamo $t := \min\{\delta_\Omega(z), r/2\}$ e $w := x + tu$. Allora esiste $0 < c_1 < 2$, dipendente solo da r e θ (quindi solo da R), tale che

$$\delta_{\mathbb{C}\setminus\Omega}(w) \geq c_1 \delta_\Omega(z). \tag{47}$$

Con questa scelta di c_1 abbiamo che $c_1\delta_\Omega(z) < |z - w| \leq 2\delta_\Omega(z)$, e che $D\big(w, \delta_\Omega(z)\big) \subseteq \mathbb{C} \setminus \Omega$. Consideriamo ora la funzione olomorfa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{D}$ data da

$$f(\zeta) = \frac{c_1\delta_\Omega(z)}{\zeta - w}$$

per ogni $\zeta \in \Omega$; che f abbia valori in $\mathbb{D}$ segue dalla (47). Allora, per la Proposizione 1.1.11, si ha

$$\begin{aligned}
K_\Omega(z; v) &\geq K_\mathbb{D}\big(f(z); f'(z)v\big) \geq \frac{|f'(z)||v|}{1 - |f(z)|^2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{|f'(z)||v|}{1 - |f(z)|} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|z - w| - c_1\delta_\Omega(z)} \cdot \frac{c_1\delta_\Omega(z)}{|z - w|}|v| \\
&\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\delta_\Omega(z) - c_1\delta_\Omega(z)} \cdot \frac{c_1\delta_\Omega(z)}{2\delta_\Omega(z)}|v| = \frac{c_1}{4(2 - c_1)\delta_\Omega(z)}|v|,
\end{aligned}$$

dove la seconda disuguaglianza segue dal lemma di Schwarz-Pick e dalla definizione di $K_{\mathbb{D}}$, e le altre da quanto trovato sopra. Dato che c_1 dipende solo da R e non da z, abbiamo concluso. $\square$

Definizione 4.1.23. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. Diciamo che Ω è un *dominio lipschitziano* (rispettivamente, *dominio* C^0) se per ogni $x \in \partial\Omega$ esistono un intorno U_x di x, un cambio di coordinate unitarie centrato in x e una funzione lipschitziana (rispettivamente, una funzione continua) φ_x, definita in un qualche intorno aperto dell'origine in $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$, tali che, se $w = (w_1, \ldots, w_n)$ sono le suddette coordinate e W_x è l'immagine di U_x tramite esse, allora $U_x \cap \Omega$ in coordinate è dato da

$$\{w \in W_x \mid \mathfrak{Im} w_n > \varphi_x(w_1, \ldots, w_{n-1}, \mathfrak{Re} w_n)\}.$$

Proposizione 4.1.24. *Sia $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un dominio lipschitziano. Allora Ω è localmente Goldilocks.*

Dimostrazione. Si verifica facilmente che un dominio lipschitziano soddisfa sia la condizione di cono interno che la condizione di cono esterno. La tesi segue dunque dai Lemmi 4.1.21 e 4.1.22. $\square$

È facile costruire un esempio di dominio illimitato $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ che soddisfi le ipotesi della Proposizione 4.1.24 e tale che $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ abbia cardinalità più che numerabile: per esempio, possiamo immergere l'albero binario infinito in $\mathbb{C}$, e considerarne un intorno Ω sufficientemente piccolo tale che $\partial\Omega$ sia localmente un'unione finita di curve lisce. In tal modo, Ω è semplicemente connesso, per cui biolomorfo a $\mathbb{D}$ e di conseguenza taut, e $\overline{\Omega}$ è localmente connessa; quindi questo dominio soddisfa le ipotesi del Teorema 4.1.15. È facile però notare che, in questo caso, otteniamo soltanto una versione modificata e più debole del teorema di Wolff-Denjoy.

Passiamo ora a costruire l'esempio in $\mathbb{C}^2$. Diremo soltanto a grandi linee quali sono i passaggi, senza entrare nei dettagli.

Prendiamo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ costruito come sopra, e sia $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$ un biolomorfismo; per [BZ2, Theorem 1.9] (si veda il Teorema 4.2.6 più avanti), possiamo estendere φ a un omeomorfismo $\overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \overline{\Omega}^{\mathcal{E}}$, che chiameremo sempre φ. Poniamo $A := \varphi^{-1}(\overline{\Omega}^{\mathcal{E}} \setminus \overline{\Omega}) \subseteq S^1$; come specificato in [BZ2, Section 2.3], è possibile dimostrare che φ ristretto a $\mathbb{D} \cup (S^1 \setminus A)$ è un embedding liscio.

Consideriamo la funzione $\Phi : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ data da $\Phi(z_1, z_2) := \big(\varphi(z_1), z_2\big)$. Il dominio cercato è $\Omega' = \Phi(\mathbb{B}^2)$. L'unica cosa non immediata da verificare è che sia ultravisibile, e per farlo verificheremo che sia localmente Goldilocks; quindi ci interessa soltanto $\partial\Omega$. Per costruzione, Φ si estende a un embedding C^1 su $\overline{\mathbb{B}^2} \setminus (A \times \{0\})$, per cui $\partial\Omega' = \Phi\big(\partial\mathbb{B}^2 \setminus (A \times \{0\})\big)$; allora, poiché $\mathbb{B}^2$ è Goldilocks e l'estensione di Φ è localmente un diffeomorfismo C^1 vicino ai punti di $\partial\mathbb{B}^2 \setminus (A \times \{0\})$, si ottiene che Ω' è localmente Goldilocks.

4.2 Estensioni al bordo

Elenchiamo ora, senza dimostrarli, alcuni teoremi che legano l'ipotesi di visibilità alle estensioni al bordo di funzioni. Risultati di estensione erano noti da tempo per il caso di mappe tra domini regolari, per esempio strettamente pseudoconvessi o con bordo liscio. Gli enunciati che vedremo hanno ipotesi che permettono una minore regolarità del bordo (abbiamo visto, tra gli altri esempi, domini con visibilità che hanno delle cuspidi), ma tornerà in gioco la Gromov-iperbolicità, che nei teoremi di tipo "Wolff-Denjoy" non era presente tra le ipotesi.

Teorema 4.2.1. *([BZ1, Theorem 1.5]) Siano D e Ω due domini limitati di $\mathbb{C}^n$. Supponiamo che D sia pseudoconvesso con bordo C^2, e che Ω sia un dominio Goldilocks che soddisfa una condizione di cono interno. Allora ogni funzione olomorfa propria $F : D \longrightarrow \Omega$ si estende a una funzione continua su $\overline{D}$.*

I teoremi di estensione si hanno non solo per le funzioni olomorfe proprie, ma anche per i quasi-embedding isometrici.

Definizione 4.2.2. Siano (X, d_1) e (Y, d_2) due spazi metrici, e fissiamo $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$. Una funzione $F : X \longrightarrow Y$ è detta (λ, κ)-*quasi-embedding isometrico rispetto a d_1 e d_2* se si ha

$$\frac{1}{\lambda} d_2\big(F(x_1), F(x_2)\big) - \kappa \leq d_1(x_1, x_2) \leq \lambda d_2\big(F(x_1), F(x_2)\big) + \kappa$$

per ogni $x_1, x_2 \in X$.

La funzione F è detta *quasi-embedding isometrico rispetto a d_1 e d_2* se è un (λ, κ)-quasi-embedding isometrico rispetto a d_1 e d_2 per qualche $\lambda \geq 1$ e $\kappa > 0$.

Risultati di estensione sono ben noti per i quasi-embedding isometrici tra spazi Gromov-iperbolici, si veda [BH, Part III, Chapter H, Theorem 3.9].

Teorema 4.2.3. *([BZ1, Theorem 1.7]) Siano D un dominio limitato di $\mathbb{C}^m$ e Ω un dominio Goldilocks di $\mathbb{C}^n$. Supponiamo che (D, k_D) sia uno spazio metrico proprio e Gromov-iperbolico. Sia $F : D \longrightarrow \Omega$ un quasi-embedding isometrico rispetto alle distanze di Kobayashi e continuo; allora esiste un'estensione continua $\tilde{F} : D \cup \partial^G D \longrightarrow \overline{\Omega}$.*

Bharali e Zimmer hanno dimostrato teoremi di estensione anche per domini con visibilità non necessariamente limitati.

Definizione 4.2.4. Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}^n$. Diciamo che Ω *ha delle buone geodetiche* se:

- è Kobayashi-iperbolico e completo rispetto a k_Ω;
- per ogni coppia di successioni $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}, \{w_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ tali per cui si abbia $\lim\limits_{j \longrightarrow +\infty} z_j = \lim\limits_{j \longrightarrow +\infty} w_j = \xi \in \partial^{\mathcal{E}} \Omega$, e date σ_j delle geodetiche congiungenti z_j a w_j per ogni $j \in \mathbb{N}$, si ha che esiste (e quindi per ogni) $o \in \Omega$ tale che $\lim\limits_{j \longrightarrow +\infty} k_\Omega(o, \sigma_j) = +\infty$.

Teorema 4.2.5. *([BZ2, Theorem 1.6]) Siano $\Omega_1 \subseteq \mathbb{C}^{n_1}$ e $\Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^{n_2}$ due domini tali che:*

(1) il dominio Ω_1 ha delle buone geodetiche;
(2) il dominio Ω_2 è (λ, κ)-visibile per ogni $\lambda \geq 1$ e $\kappa \geq 0$.

Sia $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ un quasi-embedding isometrico rispetto alle distanze di Kobayashi; allora f si estende a una funzione continua $\tilde{f} : \overline{\Omega}_1^{\mathcal{E}} \longrightarrow \overline{\Omega}_2^{\mathcal{E}}$.

Teorema 4.2.6. *([BZ2, Theorem 1.9]) Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subsetneq \mathbb{C}$ due domini lipschitziani. Sia $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ un biolomorfismo; allora f si estende a un omeomorfismo $\tilde{f} : \overline{\Omega}_1^{\mathcal{E}} \longrightarrow \overline{\Omega}_2^{\mathcal{E}}$.*

Il prossimo risultato permette di andare in senso opposto: data un estensione al bordo, dedurne la visibilità del dominio.

Teorema 4.2.7. *([BZ2, Theorem 1.10]) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio Kobayashi-iperbolico, e supponiamo che (Ω, k_Ω) sia Gromov-iperbolico. Se l'identità id_Ω si estende a un omeomorfismo da $\Omega \cup \partial^G \Omega$ in $\overline{\Omega}^{\mathcal{E}}$ allora:*

(1) si ha che Ω è completo rispetto alla distanza di Kobayashi;
(2) si ha che Ω è $(1, \kappa)$-visibile per ogni $\kappa \geq 0$.

Passiamo ora ai teoremi di [CMS], che trattano il caso di sottovarietà qualsiasi.

Definizione 4.2.8. Sia X una sottovarietà complessa, connessa e limitata di $\mathbb{C}^m$. Un sottoinsieme S di X si dice *sottospazio geodetico* se:

- lo spazio metrico $(S, k_X|_{S \times S})$ è completo;
- per ogni coppia di punti distinti di S, esiste ua geodetica di (X, k_X) che li congiunge e che sia tutta contenuta in S.

Definizione 4.2.9. Sia X una sottovarietà complessa, connessa e limitata di $\mathbb{C}^n$. Un sottospazio geodetico S si dice *sottospazio di visibilità* se per ogni $p, q \in \overline{S} \setminus S$ (la chiusura è in $\mathbb{C}^n$) con $p \neq q$ esistono in $\mathbb{C}^n$ due intorni U e V, rispettivamente di p e di q, e un compatto $K \subseteq S$ tali che $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$ e, per ogni geodetica $\sigma : [a, b] \longrightarrow S$ di (X, k_X) che collega un punto di $U \cap S$ a un punto di $V \cap S$, si ha $\sigma([a, b]) \cap K \neq \varnothing$.

Definizione 4.2.10. Sia (X, d) uno spazio metrico e $(\iota, \tilde{X})$ una sua compattificazione. Un *loop geodetico di X in $\tilde{X}$* è una geodetica $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow X$ (con la distanza euclidea in partenza e d in arrivo) tale che l'insieme dei suoi punti limite a $+\infty$ è uguale a quello dei punti limite a $-\infty$.

Teorema 4.2.11. *([CMS, Theorem 1.4]) Sia X una sottovarietà complessa, connessa e limitata di $\mathbb{C}^n$. Sia $S \subseteq X$ un sottospazio geodetico di M tale che $(S, k_X|_{S \times S})$ sia Gromov-iperbolico. Allora S è sottospazio di visibilità se e solo se l'identità id_S si estende a una funzione $\tilde{id}_S : S \cup \partial^G S \longrightarrow \overline{S}$ continua e suriettiva.*

Inoltre, tale estensione è un omeomorfismo se e solo se S non ha loop geodetici in $\overline{S}$.

Teorema 4.2.12. *([CMS, Theorem 1.5]) Siano $X \subseteq \mathbb{C}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{C}^n$ due sottovarietà complesse, connesse e limitate, e supponiamo che (X, k_X) sia completo e Gromov-iperbolico. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'isometria rispetto alle distanze di Kobayashi, e supponiamo che $S := f(X)$ sia un sottospazio di visibilità di Y. Allora f si estende a una funzione continua $\tilde{f} : X \cup \partial^G X \longrightarrow \overline{Y}$.*

Inoltre, se S non ha loop geodetici in $\overline{S}$ allora $\tilde{f}$ è un omeomorfismo tra $X \cup \partial^G X$ e $\overline{S}$.

Riferimenti bibliografici

[A1] M. Abate: Boundary behaviour of invariant distances and complex geodesics. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Serie VIII*, **80** (1986), no. 3, 100–106

[A2] M. Abate: **Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds**. Mediterranean Press, Cosenza, 1989 [`http://www.dm.unipi.it/~abate/libri/libriric/libriric.html`]

[A3] M. Abate: Iterates and semigroups on taut manifolds. *Atti delle Giornate di Geometria Analitica e Analisi Complessa, Rocca di Papa, 1988*, (1990), 1–13

[A4] M. Abate: Iteration theory, compactly divergent sequences and commuting holomorphic maps. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV*, **18** (1991), no. 2, 167–191

[A5] M. Abate: A characterization of hyperbolic manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **117** (1993), no. 3, 789–793

[A6] M. Abate: **Holomorphic Dynamics on Hyperbolic Riemann Surfaces**. De Gruyter, Berlin, 2023

[AH] M. Abate, P. Heinzner: Holomorphic actions on contractible domains without fixed points. *Mathematische Zeitschrift*, **211** (1992), no. 4, 547–555

[Ah] L. V. Ahlfors: **Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory**. AMS Chelsea Publishing, Providence, 1973

[BB] Z. M. Balogh, M. Bonk: Gromov hyperbolicity and the Kobayashi metric on strictly pseudoconvex domains. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **75** (2000), no. 3, 504–533

[B1] T. J. Barth: Taut and tight complex manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **24** (1970), 429–431

[B2] T. J. Barth: The Kobayashi distance induces the standard topology. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **35** (1972), 439–441

[BM] G. Bharali, A. Maitra: A weak notion of visibility, a family of examples, and Wolff-Denjoy theorems. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V*, **22** (2021), no. 1, 195–240

[BZ1] G. Bharali, A. Zimmer: Goldilocks domains, a weak notion of visibility, and applications. *Advances in Mathematics*, **310** (2017), 377–425

[BZ2] G. Bharali, A. Zimmer: Unbounded visibility domains, the end compactification, and applications. Preprint, arXiv:2206.13869v1 (2022)

[BNT] F. Bracci, N. Nikolov, P. J. Thomas: Visibility of Kobayashi geodesics in convex domains and related properties. *Mathematische Zeitschrift*, **301** (2022), no. 2, 2011–2035

[BH] M. R. Bridson, A. Haefliger: **Metric-Spaces of Non-Positive Curvature**. Springer, Berlin, 1999

[Ca] H. Cartan: Sur les rétractions d'une variété. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, **303** (1986), no. 14, 715

[CMS] V. S. Chandel, A. Maitra, A. D. Sarkar: Notions of Visibility with respect to the Kobayashi distance: Comparison and Applications. Preprint, arXiv:2111.00549v1 (2021)

[Ch] S. Cho: A lower bound on the Kobayashi metric near a point of finite type in $\mathbb{C}^n$. *Journal of Geometric Analysis*, **2** (1992), no. 4, 317–325

[D'A] J. P. D'Angelo: Real hypersurfaces, orders of contact, and applications. *Annals of Mathematics. Second Series*, **115** (1982), no. 3, 615–637

[D] A. Denjoy: Sur l'itération des fonctions analytiques. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **182** (1926), 255–257

[FR] F. Forstnerič, J.-P. Rosay: Localization of the Kobayashi metric and the boundary continuity of proper holomorphic mappings. *Mathematische Annalen*, **279** (1987), no. 2, 239–252

[F] H. Freudenthal: Über die Enden topologischer Räume und Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*, **33** (1931), no. 1, 692–713

[G] I. Graham: Boundary behavior of the Carathéodory and Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$ with smooth boundary. *Transactions of the American Mathematical Society*, **207** (1975), 219–240

[H] L. Hörmander: **An Introduction to Complex Analysis in Several Variables**. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1990

[Ka] A. Karlsson: Non-expanding maps and Busemann functions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **21** (2001), no. 5, 1447–1457

[Ke] J. L. Kelley: **General Topology**. Springer, New York, 1975

[KR] N. Kerzman, J.-P. Rosay: Fonctions plurisousharmoniques d'exhaustion bornées et domaines taut. *Mathematische Annalen*, **257** (1981), no. 2, 171–184

[Ki1] P. Kiernan: On the relations between taut, tight and hyperbolic manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **76** (1970), 49–51

[Ki2] P. Kiernan: Hyperbolically imbedded spaces and the big Picard theorem. *Mathematische Annalen*, **204** (1973), 203–209

[Ko1] S. Kobayashi: Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **19** (1967), 460–480

[Ko2] S. Kobayashi: **Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings: An Introduction (Second Edition)**. World Scientific Publishing, Singapore, 2005

[Kr] S. G. Krantz: **Function Theory of Several Complex Variables: Second Edition**. AMS Chelsea Publishing, Providence, 2001

[M] D. Ma: Sharp estimates of the Kobayashi metric near strongly pseudoconvex points. In **The Madison Symposium on Complex Analysis**, Contemporary Mathematics **187**, American Mathematical Society, Providence, 1992, pp. 329–338

[N] R. Narasimhan: **Several Complex Variables**. University of Chicago Press, Chicago, 1971

[NTT] N. Nikolov, P. J. Thomas, M. Trybuła: Gromov (non-)hyperbolicity of certain domains in $\mathbb{C}^2$. *Forum Mathematicum*, **28** (2016), no. 4, 783–794

[Rosay] J.-P. Rosay: Un exemple d'ouvert borné de $\mathbb{C}^3$ "taut" mais non hyperbolique complet. *Pacific Journal of Mathematics*, **98** (1982), no. 1, 153–156

[Rossi] H. Rossi: Vector fields on analytic spaces. *Annals of Mathematics. Second Series*, **78** (1963), 455–467

[Roy] H. L. Royden: Remarks on the Kobayashi metric. In **Several Complex Variables II**, Proceedings of the International Mathematical Conference, Lecture Notes in Mathematics **185**, Springer, Berlin, 1971, pp. 125–137

[Si] N. Sibony: A class of hyperbolic manifolds. In **Recent developments in several complex variables**, Annals of Mathematics Studies **100**, Princeton University Press, Princeton, 1981, pp. 357–372

[Sp] M. Spivak: **A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume I, Third edition**. Publish or Perish, Inc., Houston, 1999

[V] S. Venturini: Pseudodistances and pseudometrics on real and complex manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta*, **154** (1989), 385–402

[Wo] J. Wolff: Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **182** (1926), 918–920

[Wu] H. Wu: Normal families of holomorphic mappings. *Acta Mathematica*, **119** (1967), 193–233

Ringraziamenti

Ovviamente, non posso che iniziare ancora una volta ringraziando il mio relatore, il professor Marco Abate. Oltre ai motivi già citati nei ringraziamenti della tesi triennale, si vanno ad aggiungere le opportunità che mi si sono presentate grazie a lui. Gliene sono immensamente grato, e so che lo sarò ancora di più quando avrò sfruttato a pieno queste opportunità.

Ringrazio gli amici con cui ho condiviso gli ultimi cinque anni, perché insieme non ci siamo mai annoiati. Un ringraziamento dedicato va ad Alessio e Federico, perché con loro, per un anno, ho condiviso pure l'affitto!

Un grazie particolare a Sirio per avermi fornito la Figura 4.

Sebbene gli anni condivisi siano "solamente" quattro, non posso non ringraziare anche il 'popolo della sala comune del collegio Timpano'; insieme a loro, fra biliardino, cinema, videogiochi, giochi da tavolo e molto altro, si trova sempre il modo di divertirsi.

Grazie a tutti voi.

Arrivato a questo punto, dovrei ringraziare i parenti e i genitori, ma non riesco a trovare le parole adatte senza ripetere quanto già scritto nei ringraziamenti della tesi triennale, perciò vi dico solamente: grazie!

Infine, poiché so che avrebbero voluto vedermi raggiungere questo traguardo, ringrazio le due persone a cui questa tesi è dedicata.

A nonna Alma e nonno Giancarlo.